

4

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

2023

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2023 • Том. 13 • № 4

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2023 • Vol. 13 • № 4



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия

Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Тираж 500 экз.

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2023, № 4

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPEPhI, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia

Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia

Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

500 copies

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2023, no. 4



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

АНАЛИЗ ДАННЫХ

<i>Битюков Ю.И., Битюков П.Ю.</i> Построение параметрического семейства вейвлетов и использование его в обработке изображений.....	7
<i>Персиянцева С.В., Артеменков С.Л.</i> Исследование связи личностного ресурса и психологического благополучия студентов на начальном этапе обучения в вузе.....	23
<i>Хорошилов А.А., Кан А.В., Евдокимова Е.А., Пицхелаури С.Г.</i> Установление сходства текстовых документов.....	45

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

<i>Базилевский М.П.</i> Сравнительный анализ эффективности методов построения вполне интерпретируемых линейных регрессионных моделей.....	59
<i>Мохначева А.А., Герасимова К.В., Ибрагимов Д.Н.</i> Методы численного моделирования множеств 0-управляемости линейной дискретной динамической системы с ограниченным управлением на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации.....	84

КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

<i>Савенков Е.А., Катышев Д.А., Ермаков С.С., Юрьева Н.Е.</i> Разработка информационной системы для психологической диагностики.....	111
<i>Нуркаева И.М.</i> Информационная система для комплексной оценки эмоционального состояния.....	126
<i>Соболь В.Р., Торшинский Р.О.</i> О задаче формирования портфеля облигаций по вероятностному критерию в модели Кокса-Ингерсолла-Росса.....	140

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

<i>Вертешев С.М., Воронов М.В.</i> Моделирование процессов автоматизированного формирования рабочих программ.....	153
---	-----



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Герасименко П.В., Ходаковский В.А.

Моделирование длительности жизни
выдающихся ученых математиков 20-го века..... 165

Комаров И.В., Куравский Л.С.

Дискриминантный анализ на основе статистик Кохонена 176



SHORT MESSAGES

Gerasimenko P.V., Khodakovsky V.A.

Simulation of the Life Outstanding Scientific Mathematics

Born in the 20th Century in the USSR and in the Countries of the World 174

Komarov I.V., Kuravsky L.S.

Discriminant Analysis Based on Kohonen Statistics 182



УДК 004.93

Построение параметрического семейства вейвлетов и использование его в обработке изображений

Битюков Ю.И.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>
e-mail: yib72@mail.ru

Битюков П.Ю.**

Московский энергетический институт
(национальный исследовательский университет) (МЭИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>
e-mail: p.bityukoff@yandex.ru

Данная статья посвящена построению параметрического семейства биортогональных вейвлетов по схеме подъема и схемам подразделений, и применению такого семейства в задаче подрисовки изображений, когда часть пиксельных данных на изображении отсутствует или каким-либо образом перезаписана. Параметрическое семейство вейвлетов предоставляет параметрическое семейство фильтров для восстановления поврежденных изображений. При таком восстановлении, нужный вейвлет выбирается не из каких-то общих соображений, а из параметрического семейства в процессе решения оптимизационной задачи.

Ключевые слова: вейвлет, схема подъема, схема подразделений, обработка изображений.

Для цитаты:

Битюков Ю.И., Битюков П.Ю. Построение параметрического семейства вейвлетов и использование его в обработке изображений // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 7–22. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130401>

***Битюков Юрий Иванович**, доктор технических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>, e-mail: yib72@mail.ru



****Битюков Павел Юрьевич**, студент-бакалавр, Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет) (МЭИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>, e-mail: p.bityukoff@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Вейвлеты и схемы подразделений тесно связаны. Как материнский вейвлет так и масштабирующая функция, возникающие в рамках ортогонального или неортогонального кратномасштабных анализов могут быть получены через стационарные схемы подразделений, где в качестве маски такой схемы используется масштабная последовательность [1]. Вейвлеты давно применяются в задачах обработки изображений, а схемы подразделений возникли в задачах геометрического моделирования.

В данной статье рассматривается вопрос получения параметрических семейств биортогональных вейвлетов по схеме подъема вейвлетов Хаара, исследуется класс гладкости и порядок этих вейвлетов. В качестве применения в статье рассматривается проблема подрисовки изображения, которая возникает [2], когда часть пиксельных данных на изображении отсутствует или перезаписана другими средствами. С этим приходится иметь дело, например, при восстановлении древних рисунков, когда часть изображения отсутствует или повреждена из-за старения или царапин. Задача подрисовки состоит в том, чтобы восстановить отсутствующую область из наблюдаемых неполных данных. В последние годы было предложено много полезных методов для решения этой проблемы, в том числе были предложены методы, основанные на вейвлетах [3,4]. В данной статье решение этой задачи будет также основано на использовании вейвлетов, но выбор нужного вейвлета будет происходить не из общих соображений, а из параметрического семейства в процессе решения оптимизационной задачи.

В статье даются основные теоретические сведения из теории стационарных схем подразделений, приводятся достаточные условия сходимости таких схем, а также требования, какие необходимо наложить на маску схемы, чтобы получить функцию нужного класса гладкости. Кроме этого, рассматриваются некоторые результаты, касающиеся биортогональных вейвлет-систем и схемы подъема, посредством которой можно улучшать свойства вейвлета. Эти теоретические сведения затем применяются к подъему вейвлетов Хаара и получению из них непрерывных и гладких вейвлетов с большим чем у вейвлетов Хаара числом нулевых моментов. Как известно, число нулевых моментов определяет скорость убывания вейвлет-коэффициентов, что важно, например, в задачах сжатия данных. Последний раздел статьи посвящен вычислительным экспериментам.

2. СХЕМЫ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе приводятся основные результаты, касающиеся стационарных схем подразделений, которые будут использованы в дальнейшем. Схема подраз-

деления [5] определяется заданной последовательностью $a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$, $s \in \mathbf{N}$. Мы будем предполагать, что $\text{supp } a = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\}$ – конечное множество. Обозначим $l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей $v = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$, в котором норма определяется равенством $\|v\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} |v_\alpha|$. Введем в рассмотрение оператор $S_a : l_\infty(\mathbf{Z}^s) \rightarrow l_\infty(\mathbf{Z}^s)$, который определим формулой $(S_a v)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} v_\beta$, $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$. Последовательность $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$ будем называть маской подразделения, а S_a – оператором подразделений.

Определение 1. [5] Будем говорить, что схема подразделений

$$v^m = S_a v^{m-1} = (S_a)^m v, m = 1, 2, \dots, v^0 = v$$

сходится в $l_\infty(\mathbf{Z}^s)$, если существует непрерывная функция $(S_a^\infty v) : \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\| \left((S_a^\infty v) \left(\frac{\cdot}{2^m} \right) - v^m \right) \right\|_\infty = 0. \quad (1)$$

Если функция $(S_a^\infty v)$ удовлетворяет дополнительному свойству $(S_a^\infty v)(k) = v_k$, $k \in \mathbf{Z}^s$, то она называется интерполяционной.

Теорема 1. (Необходимое условие сходимости схемы подразделений [5]) Пусть $s = 1$. Предположим, что схема подразделений сходится для некоторого $v \in l_\infty(\mathbf{Z})$ и $(S_a^\infty v) \not\equiv 0$. Тогда маска удовлетворяет условию $\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{2\beta} = 1$; $\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{2\beta+1} = 1$.

Введем в рассмотрение многочлен Лорана $A(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$. Тогда из необходимого условия сходимости схемы подразделений получаем: $A(-1) = 0$; $A(1) = 2$. Из первого равенства следует, что, если маска имеет конечный носитель, т.е. $A(z) = z^{-k} R(z)$, где $R(z)$ – многочлен, то этот многочлен делится нацело на $(z+1)$. Поэтому $A(z) = (1+z)Q(z)$, $Q(1) = 1$. Пусть $Q(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q_n z^n$ и $q = \{q_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

Теорема 2. [6] Пусть $s = 1$. Схема S_a сходится при любом выборе начальной последовательности v^0 , если существует $L \in \mathbf{N}$ такое, что $\|(S_q)^L\|_\infty < 1$.

Если обозначить $Q_L(z) = Q(z)Q(z^2)\dots Q(z^{2^{L-1}}) = \sum_j q_j^{[L]} z^j$, то имеет место равенство [6]:

$$\|(S_q)^L\|_\infty = \max_{0 \leq i < 2^L} \sum_j |q_{i-j \cdot 2^L}^{[L]}|.$$

Теорема 3. [6] Пусть $s = 1$ и $A(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n Q(z)$. Если S_q сходится при любом выборе начальной последовательности, то $(S_a^\infty v) \in C^n(\mathbf{R})$ для любой начальной последовательности v и $\frac{d^n}{dt^n} (S_a^\infty v)(t) = (S_b^\infty (\Delta^n v))(t)$, где $\Delta^n v = \Delta(\Delta^{n-1} v)$ и $(\Delta^1 v)_k = v_k - v_{k-1}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 4. [5] Предположим, что схема подразделений сходится для всех $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ и для некоторого $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ функция $(S_a^\infty v) \not\equiv 0$. Тогда маска $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$



определяет единственную непрерывную функцию с компактным носителем φ , удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} a_{\alpha} \varphi(2t - \alpha), t \in \mathbf{R}^s, \quad \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} \varphi(t - \alpha) = 1, \forall t \in \mathbf{R}^s.$$

Более того, $(S_a^{\infty} v)(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} v_{\alpha} \varphi(t - \alpha), t \in \mathbf{R}^s.$

3. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ И СХЕМА ПОДЪЕМА

Пусть $\varphi, \tilde{\varphi}$ – две масштабирующие функции [7,1] с масштабными последовательностями u, \tilde{u} , которые имеют конечные носители:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k \varphi(2t - k), \quad \tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_k \tilde{\varphi}(2t - k).$$

Будем рассматривать последовательности с действительными членами $u_k, \tilde{u}_k \in \mathbf{R}$. Обозначим $\varphi_{j,k}(x) = 2^j \varphi(2^j x - k)$. Тогда, если $\psi, \tilde{\psi}$ – соответствующие вейвлеты, то

$$\psi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} v_k \varphi_{1,k}, \quad \tilde{\psi} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_k \tilde{\varphi}_{1,k}.$$

Многочлены Лорана, соответствующие данным последовательностям, будем обозначать $U(z), \tilde{U}(z), V(z), \tilde{V}(z)$. Для биортогональных систем имеет место равенство [8]:

$$U(z) \overline{\tilde{U}(z)} + U(-z) \overline{\tilde{U}(-z)} = 2 \tag{2}$$

для любых $z = e^{-i\xi}$ на единичной окружности и

$$\tilde{V}(z) = zU(-z^{-1}), V(z) = z\tilde{U}(-z^{-1}) \tag{3}$$

Определение 2. [9, 10] Множество $\{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}\}$ называется множеством конечных биортогональных фильтров, если соответствующая система функций $\{\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}\}$ биортогональна, т.е. $(\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) = \delta_{k,k'}, (\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j,m'}) = \delta_{m,m'}, (\tilde{\psi}_{j,m}, \varphi_{j,k}) = 0; (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,m}) = 0$ для всех $j, m, k, k', m' \in \mathbf{Z}$.

Теорема 5. (Схема подъема [9,10]) Выберем начальное множество конечных биортогональных фильтров $\{u, \tilde{u}_0, v_0, \tilde{v}\}$. Тогда новое множество конечных биортогональных фильтров $\{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}\}$ может быть найдено следующим образом

$$\tilde{U}(z) = \tilde{U}_0(z) + \tilde{V}(z) \cdot P(z^{-2}), V(z) = V_0(z) - U(z) \cdot P(z^2),$$

где $P(z)$ – произвольный многочлен Лорана.

Помимо схемы подъема известен также и двойственный подъем $\{u_0, \tilde{u}, v, \tilde{v}_0\} \rightarrow \{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}\}$, который осуществляется по следующим формулам [9, 10]:

$$U(z) = U_0(z) - V(z) \cdot \tilde{P}(z^{-2}), \tilde{V}(z) = \tilde{V}_0(z) + \tilde{U}(z) \cdot \tilde{P}(z^2),$$

После применения подъема и двойственного подъема сохраняются [9] равенства (2) и (3). С помощью поема или двойственного подъема путем надлежащим образом выбора многочленов $P(z)$, $\tilde{P}(z)$, могут быть улучшены свойства масштабирующих функций и вейвлетов.

Как известно, в случае биортогональных вейвлет-систем для $f \in L_2(\mathbf{R})$ имеет место равенство [8]:

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{j,n}) \varphi_{j,n} + \sum_{s \geq j} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\psi}_{s,n}) \psi_{s,n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{j,n} \varphi_{j,n} + \sum_{s \geq j} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_{s,n} \psi_{s,n}, \quad (4)$$

где $c_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$, $d_{j,m} = (f, \tilde{\psi}_{j,m})$. Кроме того, имеет место теорема

Теорема 6. [7] Если $f \in C^N(\mathbf{R})$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^l \tilde{\psi}(x) dx = 0$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, то

$$(f, \tilde{\psi}_{j,k}) = O\left(\frac{1}{2^{j(N+0.5)}}\right), \quad j \rightarrow +\infty.$$

Про вейвлет $\tilde{\psi}$, удовлетворяющий условию теоремы, говорят [7], что он порядка N или имеет N нулевых моментов. В данной статье будем получать функции $\varphi \in C^k(\mathbf{R})$, $k = 0, 1, \dots$, а вейвлеты $\tilde{\psi}$, по возможности, будем делать большего порядка, тем самым управляя скоростью убывания коэффициентов.

Пусть функция f представлена в виде $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{0,n}) \varphi_{0,n}$. По формуле (4)

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{0,n}) \varphi_{0,n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{-j,n} \varphi_{-j,n} + \sum_{-j \leq s \leq 0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} d_{s,m} \psi_{s,m}.$$

Заметим, что $\tilde{\varphi}_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_{k-2n} \tilde{\varphi}_{j+1,k}$, $\tilde{\psi}_{j,n}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_{k-2n} \tilde{\varphi}_{j+1,k}(x)$. Умножая скалярно полученные равенства на f , получим $c_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_{k-2n} c_{j+1,k}$, $d_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_{k-2n} c_{j+1,k}$. Полученное преобразование можно представить в виде свертки, если обозначить $(\downarrow v)_k = v_{2k}$. Тогда

$$c_{j,\bullet} = \downarrow (c_{j+1,\bullet} * \tilde{u}_{-\bullet}), \quad d_{j,\bullet} = \downarrow (c_{j+1,\bullet} * \tilde{v}_{-\bullet}) \quad (5)$$

где $(\tilde{u}_{-\bullet})_k = \tilde{u}_{-k}$. Формулы (5) представляют собой алгоритм вейвлет-разложения. Имеет место и алгоритм вейвлет-восстановления [8]:

$$c_{j+1,\bullet} = (\uparrow c_{j,\bullet}) * u + (\uparrow d_{j,\bullet}) * v, \quad (6)$$

где введено обозначение $(\uparrow z)_n = z_k$, если $n = 2k$; и $(\uparrow z)_n = 0$, если $n = 2k + 1$.

В заключении данного раздела рассмотрим способ нахождения приближенных значений масштабирующей функций через схему подразделений. Отметим следующий результат [1]:

Теорема 7. [1] Пусть функция $f \in L_2(R)$ удовлетворяет условию Липшица порядка ε при некотором $\varepsilon \in (0; 1]$, т.е. существует константа C_1 такая,



что $|f(x) - f(y)| \leq C_1 |x - y|^\varepsilon$ для всех $x, y \in R$. Пусть действительная функция $\varphi \in L_1(R) \cap L_2(R)$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\varepsilon |\varphi(x)| dx = C_2 < +\infty$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$.

Тогда $\left| (f, \varphi_{m,k}) - 2^{-m/2} f(2^{-m} k) \right| \leq C_1 C_2 2^{-m(\varepsilon+1/2)}$.

Теорема 8. Пусть функция $\varphi \in C(\mathbf{R})$, $\tilde{\varphi} \in L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$, $\text{supp } \varphi, \text{supp } \tilde{\varphi} \subset [-m; m]$, и $\int_{-m}^m \tilde{\varphi}(x) dx = 1$. Тогда $\lim_{j \rightarrow +\infty} \left\| 2^{j/2} (\varphi, \tilde{\varphi}_{j,\cdot}) - \varphi(2^{-j} \cdot) \right\|_\infty = 0$.

Доказательство. Заметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(t) dt = 2^{-j/2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| 2^{j/2} (\varphi, \tilde{\varphi}_{j,k}) - \varphi(2^{-j} k) \right| &= \left| 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - \varphi(2^{-j} k)) \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx \right| \leq 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi(2^{-j} k)| |\tilde{\varphi}(2^j x - k)| dx = \\ &= \int_{-m}^m |\varphi(2^{-j} t + 2^{-j} k) - \varphi(2^{-j} k)| |\tilde{\varphi}(t)| dt \leq \int_{-m}^m |\tilde{\varphi}(x)| dx \cdot \omega(\varphi, 2^{-j} |m|), \end{aligned}$$

где $\omega(\varphi, \delta) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$ – модуль непрерывности функции φ . Пусть $\delta < 1$.

Тогда, т.к. $\text{supp } \varphi \subset [-m; m]$, то $\omega(\varphi, \delta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| < \delta \\ x_1, x_2 \in [-m-1; m+1]}} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \omega_1(\varphi, \delta)$. По те-

ореме Кантора $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_1(\varphi, \delta) = 0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Пусть теперь $c_{j,k} = (\varphi, \varphi_{j,k})$ и $u_k = 0, \forall k, |k| > m$. Тогда [7] $\text{supp } \varphi \subset [-m; m]$ и формулы (6) перепишутся в виде [1]:

$$c_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_{m-2k} c_{j,k}, \quad c_{0,k} = \delta_{0,k}. \quad (7)$$

В дальнейших рассуждениях будет выполняться $U(-1) = 0, U(1) = \sqrt{2}$. Поэтому в схеме (7) не выполняются необходимые условия сходимости. Пусть $\hat{c}_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} c_{j,k}$. Тогда

$$\hat{c}_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sqrt{2} u_{m-2k} \hat{c}_{j,k}, \quad \hat{c}_{0,k} = \delta_{0,k}. \quad (8)$$

Предположим, что эта схема сходится и $\hat{\varphi}$ – предельная функция. Тогда, по теореме 7

$$\begin{aligned} \left| \hat{\varphi}(2^{-j} k) - \varphi(2^{-j} k) \right| &= \left| \hat{\varphi}(2^{-j} k) - \hat{c}_{j,k} + 2^{\frac{j}{2}} c_{j,k} - \varphi(2^{-j} k) \right| \leq \left| \hat{\varphi}(2^{-j} k) - \hat{c}_{j,k} \right| + 2^{\frac{j}{2}} \left| c_{j,k} - 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j} k) \right| \leq \\ &\leq \left\| \hat{\varphi}(2^{-j} \cdot) - \hat{c}_{j,\cdot} \right\|_\infty + C_1 C_2 2^{-j\varepsilon}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно равенству (1), получаем $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\hat{\varphi}(2^{-j} \cdot) - \varphi(2^{-j} \cdot)\|_{\infty} = 0$. В случае непрерывности функции φ аналогичный результат получается из теоремы 8. Таким образом, приближенные значения $\varphi(2^{-j} k)$ могут быть найдены по формуле: $\varphi(2^{-j} k) \approx \hat{c}_{j,k}$.

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПОДЪЕМА ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА

Рассмотрим следующие многочлены Лорана

$$\tilde{U}(z) = U_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{V}_0(z) = V(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

Двойственный подъем приводит к следующим многочленам:

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \tilde{P}(z^{-2}); \quad \tilde{V}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \tilde{P}(z^2).$$

Обязательно должно быть $\tilde{V}(1) = 0$, следовательно, $\tilde{P}(1) = 0$. Отсюда следует, что $U(-1) = 0$. Пусть $\tilde{P}(z) = \sum_{\lambda=-m}^m p_{\lambda} z^{\lambda}$. Вейвлет $\tilde{\psi}$ будет иметь порядок N , если [7] $\tilde{V}^{(k)}(1) = 0, \forall k = 0, 1, \dots, N-1$.

Нужно заметить, что чем больше условий накладывается на вейвлет и масштабирующую функцию, тем шире носитель этих функций. В статье рассмотрим два вида многочлена Лорана $\tilde{P}(z)$ для случаев $m = 1, 2$ и выясним какие свойства можно получить у функций $\varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$. Целью является создание параметрического семейства масштабирующих функций и вейвлетов, при этом у первых повышаем гладкость, а у вторых порядок вейвлета. После подъема функцию φ можно получить по схеме подразделений с маской $\sqrt{2}u$ и начальной последовательностью $v_k = \delta_{0,k}, k \in \mathbf{Z}$,

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1); \\ 0, & x \notin [0; 1), \end{cases} \quad \tilde{\psi} = \sum_{k=-2}^3 \tilde{v}_k \tilde{\varphi}_{1,k}, \quad \psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x-1).$$

Пусть $\tilde{P}(z) = p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z$, тогда, во-первых, должно быть $p_0 + p_{-1} + p_1 = 0$. Поскольку $\sqrt{2}\tilde{V}(z) = -1 + z + (1+z)\tilde{P}(z^2) = p_{-1}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} - 1 - p_1 - p_{-1} + z(-p_{-1} - p_1 + 1) + p_1z^2 + p_1z^3$, условие $\tilde{V}'(1) = 0$ приводит к равенству $-4p_{-1} + 4p_1 + 1 = 0$. Для удобства обозначим $p_{-1} = \alpha, p_1 = \alpha - \frac{1}{4}$. Многочлен Лорана $\sqrt{2}U(z)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sqrt{2}U(z) = -\alpha z^3 + \alpha z^2 - 2\alpha + z \left(2\alpha + \frac{3}{4} \right) + \frac{5}{4} + \frac{1-\alpha}{z} + \frac{\alpha-1}{z^2}.$$



Нужно заметить, что при таком виде многочлена Лорана $\text{supp } \varphi \subset [-2; 3]$ (см. [7]).

Теорема 9. Пусть $\tilde{P}(z) = \alpha z^{-1} + \left(\frac{1}{4} - 2\alpha\right) + \left(-\frac{1}{4} + \alpha\right)z$, последовательность $u^\alpha = \{u_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}}$ выбрана следующим образом: $u_3^\alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_2^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_1^\alpha = \frac{2\alpha + 3/4}{\sqrt{2}}$, $u_0^\alpha = \frac{5/4 - 2\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_{-1}^\alpha = \frac{1/4 - \alpha}{\sqrt{2}}$, $u_{-2}^\alpha = \frac{\alpha - 1/4}{\sqrt{2}}$ и $u_k^\alpha = 0$ для остальных k . Тогда, если $\alpha \in \left(\frac{7 - \sqrt{57}}{16}; \frac{\sqrt{57} - 3}{16}\right)$, то функция φ , определяемая схемой подразделений $S_{\sqrt{2}u^\alpha}$ по формуле (8), непрерывна на \mathbf{R} , а вейвлет $\tilde{\psi}$, определяемый последовательностью $\tilde{v}^\alpha = \{\tilde{v}_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где $\tilde{v}_0^\alpha = -\frac{3 + 8\alpha}{4\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_1^\alpha = \frac{5 - 8\alpha}{4\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_2^\alpha = \tilde{v}_3 = \frac{4\alpha - 1}{4\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_{-2}^\alpha = \tilde{v}_{-1}^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ и $\tilde{v}_k^\alpha = 0$ при остальных k , имеет порядок 2.

Доказательство. Заметим, что многочлен Лорана $\sqrt{2}U(z) = 1 + z + (1 - z)\tilde{P}(z^{-2}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2}u_k z^k$ можно представить в виде:

$$\sqrt{2}U(z) = (z + 1) \left(-\alpha z^2 + 2\alpha z + \frac{3}{4} - 2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) z^{-1} - \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) z^{-2} \right).$$

Обозначим $C(z) = -\alpha z^2 + 2\alpha z + \frac{3}{4} - 2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) z^{-1} - \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) z^{-2} = \sum_{k=-2}^2 c_k z^k$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{[2]} z^k &= C(z)C(z^2) = \sum_{k=-2}^2 \sum_{\lambda=-2}^2 c_\lambda c_k z^{k+2\lambda} = \\ &= \sum_{\mu=-6}^{-2} \left(\sum_{-2 \leq \lambda \leq \frac{\mu+2}{2}} c_{\mu-2\lambda} c_\lambda \right) z^\mu + \sum_{\mu=-1}^1 \left(\sum_{\frac{\mu-2}{2} \leq \lambda \leq \frac{\mu+2}{2}} c_{\mu-2\lambda} c_\lambda \right) z^\mu + \sum_{\mu=2}^6 \left(\sum_{\frac{\mu-2}{2} \leq \lambda \leq 2} c_{\mu-2\lambda} c_\lambda \right) z^\mu. \end{aligned}$$

Найдем, при каких значениях α будет выполнено неравенство $\|(S_c)^2\|_\infty = \max_{i=0,1,2,3} \sum_j |c_{i-4j}^{[2]}| < 1$. Из (9) следует, что данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \alpha \left(\frac{3}{4} + 2\alpha \right) \right| + \left| 4\alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) + \frac{9}{16} \right| + \left| \left(\frac{5}{4} - 2\alpha \right) \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \right| &< 1; \\ 2\alpha^2 + \left| \frac{5\alpha}{2} - 4\alpha^2 \right| + \left| 2\alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) + \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \right| &< 1; \\ \left| \alpha - \alpha^2 \right| + \alpha^2 + \left| \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \left(\alpha + \frac{3}{4} \right) \right| &< 1; \end{aligned}$$

$$\left| \alpha \left(6\alpha - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left(2\alpha + \frac{3}{4} \right) \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right) \right| + 2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right)^2 < 1,$$

решение которой представляет собой интервал $\left(\frac{7 - \sqrt{57}}{16}; \frac{\sqrt{57} - 3}{16} \right)$. По теореме 2, при этих значениях α , функция $\varphi \in C(\mathbf{R})$.

На рис. 1 представлен пример графиков масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлетов $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ при $\alpha = -0,00048$.

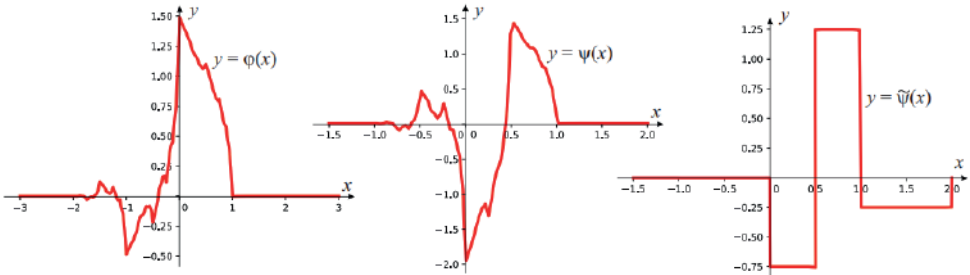


Рис. 1. Графики функций φ , ψ , $\tilde{\psi}$ при $\alpha = -0,00048$

Теорема 10. Пусть $\tilde{P}(z) = p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z + p_2z^2$, где $p_1 = \alpha$, $p_2 = -\frac{\alpha}{4} - \frac{5}{256}$, $p_{-2} = -\frac{\alpha}{4} - \frac{17}{256}$, $p_{-1} = \alpha + \frac{88}{256}$ а последовательность $u^\alpha = \{u_k^\alpha\}_{k \in \mathbf{Z}}$ выбрана следующим образом: $u_{-4}^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.01953125}{\sqrt{2}}$, $u_{-3}^\alpha = -u_{-4}^\alpha$, $u_{-2}^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_{-1}^\alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_0^\alpha = \frac{-\frac{3\alpha}{2} + 0.7421875}{\sqrt{2}}$, $u_1^\alpha = \frac{\frac{3\alpha}{2} + 1.2578125}{\sqrt{2}}$, $u_2^\alpha = \frac{\alpha + 0.34375}{\sqrt{2}}$, $u_3^\alpha = -u_2^\alpha$, $u_4^\alpha = -u_5^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.06640625}{\sqrt{2}}$ и $u_k^\alpha = 0$ для остальных k . Тогда, если $\alpha \in (-0.231363152054986; -0.112386847945014)$, то функция φ , определяемая схемой подразделений $S_{\sqrt{2}u^\alpha}$ принадлежит $C^1(\mathbf{R})$, а если $\alpha \in (-0.430370347700429; 0.0866203477004288)$, то $\varphi \in C(\mathbf{R})$. Вейвлет $\tilde{\psi}$, определяемый последовательностью $\tilde{v}^\alpha = \{\tilde{v}_k^\alpha\}_{k \in \mathbf{Z}}$, где $\tilde{v}_{-4}^\alpha = \tilde{v}_{-3}^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.06640625}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_{-2}^\alpha = \tilde{v}_{-1}^\alpha = \frac{\alpha + 0.34375}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_0^\alpha = \frac{-\frac{3\alpha}{2} - 1.2578125}{\sqrt{2}}$,



$\tilde{v}_1^\alpha = \frac{0.7421875 - \frac{3\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_2^\alpha = \tilde{v}_3^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_4^\alpha = \tilde{v}_5^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.01953125}{\sqrt{2}}$ и $\tilde{v}_k^\alpha = 0$ при остальных k , имеет порядок 4.

Доказательство. Если $\tilde{P}(z) = p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z + p_2z^2$, то с учетом $p_{-2} + p_{-1} + p_0 + p_1 + p_2 = 0$ получаем

$$\sqrt{2}\tilde{V}(z) = -1 + z + (1+z)\tilde{P}(z^2) = p_{-2}z^{-4} + p_{-2}z^{-3} + p_{-1}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} - (1+p_1+p_2+p_{-1}+p_{-2}) + z(1-p_1-p_2-p_{-1}-p_{-2}) + p_1z^2 + p_1z^3 + p_2z^4 + p_2z^5.$$

Условия $\tilde{V}^{(k)}(1) = 0$, $k = 1, 2, 3$ приводят к равенствам: $4p_1 + 8p_2 - 4p_{-1} - 8p_{-2} + 1 = 0$; $p_1 + 4p_2 + p_{-1} + 4p_{-2} = 0$; $p_1 + 14p_2 - 5p_{-1} - 30p_{-2} = 0$, соответственно. Отсюда находим

$$p_2 = -\frac{p_1}{4} - \frac{5}{256}; \quad p_3 = p_1 + \frac{11}{32}; \quad p_4 = -\frac{p_1}{4} - \frac{17}{256}.$$

Обозначая $p_1 = \alpha$, многочлен Лорана $\sqrt{2}U(z) = 1 + z - (-1 + z)\tilde{P}(z^{-2})$ перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}U(z) = & -\frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha}{z^2} + z^5 \left(\frac{\alpha}{4} + 0.06640625 \right) + \\ & + z^4 \left(-\frac{\alpha}{4} - 0.06640625 \right) + z^3 \left(-\alpha - 0.34375 \right) + z^2 \left(\alpha + 0.34375 \right) + z \left(\frac{3\alpha}{2} + 1.2578125 \right) + \\ & + 0.7421875 + \frac{\frac{\alpha}{4} + 0.01953125}{z^3} + \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.01953125}{z^4}. \end{aligned}$$

Представим его в виде $\frac{(z+1)^2}{2}D(z)$, где

$$\begin{aligned} D(z) = & z^3 \cdot (0.5\alpha + 0.1328125) + z^2 (-1.5\alpha - 0.3984375) + \\ & + z (0.5\alpha - 0.0234375) + 2.5\alpha + 1.1328125 + \frac{0.2734375 - 2.5\alpha}{z} + \frac{-0.5\alpha - 0.1953125}{z^2} + \\ & + \frac{1.5\alpha + 0.1171875}{z^3} + \frac{-0.5\alpha - 0.0390625}{z^4}. \end{aligned}$$

Итак, в данном случае \tilde{V} четвертого порядка и, если $\|(S_d)^2\|_\infty < 1$, то $(S_{\sqrt{2}u}^\infty v) \in C^1(\mathbf{R})$. Последнее условие будет выполнено, если $\alpha \in (-0.231363152054986; -0.112386847945014)$. Нужно заметить, что многочлен $\sqrt{2}\tilde{V}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\tilde{V}(z) = & p_1 z^3 + p_1 z^2 - \frac{3p_1}{2} + z^5 \left(-\frac{p_1}{4} - 0.01953125 \right) + z^4 \left(-\frac{p_1}{4} - 0.01953125 \right) + \\ & + z \left(0.7421875 - \frac{3p_1}{2} \right) - 1.2578125 + \frac{p_1 + 0.34375}{z} + \frac{p_1 + 0.34375}{z^2} + \\ & + \frac{-\frac{p_1}{4} - 0.06640625}{z^3} + \frac{-\frac{p_1}{4} - 0.06640625}{z^4}. \end{aligned}$$

Отсюда и получается утверждение теоремы.

На рис. 2 представлен пример графиков масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлетов $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ при $\alpha = -0,1598$.

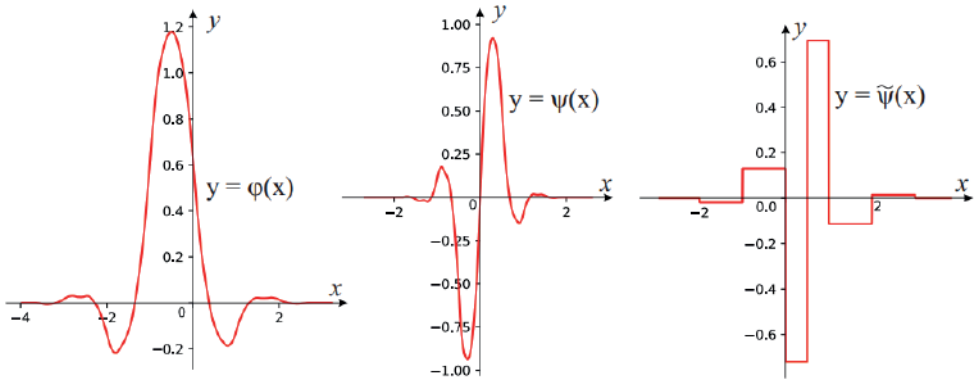


Рис. 2. Графики функций φ , ψ , $\tilde{\psi}$ при $\alpha = -0,1598$.

5. ПОДРИСОВКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

В данном разделе, для простоты обозначений, под изображением будем понимать вектор $f \in \mathbf{R}^s$. Целью будет нахождение неизвестного изображения $u \in \mathbf{R}^s$ по наблюдаемому изображению $f = Au + \eta$, где η – белый гауссовский шум с дисперсией σ^2 и A – линейный оператор. В статье решение такой задачи будет также основано на использовании вейвлетов, но выбор вейвлета будет происходить из параметрического семейства в процессе решения оптимизационной задачи. Для произвольного вектора $x \in \mathbf{R}^s$ обозначим $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^s |x_i|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$. Кроме того, для произвольной матрицы A обозначим $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda}$, где λ – максимальное собственное значение матрицы $A^T A$.

Пусть $\Omega = \{1, 2, \dots, s\}$ и $\Lambda \subset \Omega$. Наблюдаемое изображение имеет вид:



$$f_i = \begin{cases} u_i + \eta_i, & i \in \Lambda; \\ \text{произвольно,} & i \in \Omega \setminus \Lambda. \end{cases}$$

Задача восстановления неизвестного изображения u относится к задаче аппроксимации. Существует множество схем аппроксимации, например, сплайновая, но большинство из них хороши только для гладких функций. Изображения таковыми не являются. Основная проблема при восстановлении изображений заключается в сохранении особенностей, например краев, изображений, которые не могут быть хорошо сохранены многими доступными алгоритмами аппроксимации.

Обозначим P_Λ диагональную матрицу, у которой $(P_\Lambda)_{i,i} = 1, \forall i \in \Lambda$ и $(P_\Lambda)_{i,i} = 0, \forall i \in \Omega \setminus \Lambda$. Кроме того, введем еще следующие обозначения: $W_\alpha : f \rightarrow W_\alpha f$ – параметрическое дискретное вейвлет-преобразование, ставящее в соответствие данному изображению $f \in \mathbf{R}^s$ его вейвлет-коэффициенты $W_\alpha f \in \mathbf{R}^d$ и W_α^{-1} – обратное преобразование. Изображение u будем находить из следующей задачи минимизации:

$$u = W_\alpha^{-1} \beta^*; \tag{10}$$

$$\alpha^*, \beta^* = \arg \min_\alpha \min_{\beta \in \mathbf{R}^d} \frac{1}{2} \| P_\Lambda W_\alpha^{-1} \beta - P_\Lambda f \|^2 + \| \text{diag}(\lambda) \beta \|^2, \tag{11}$$

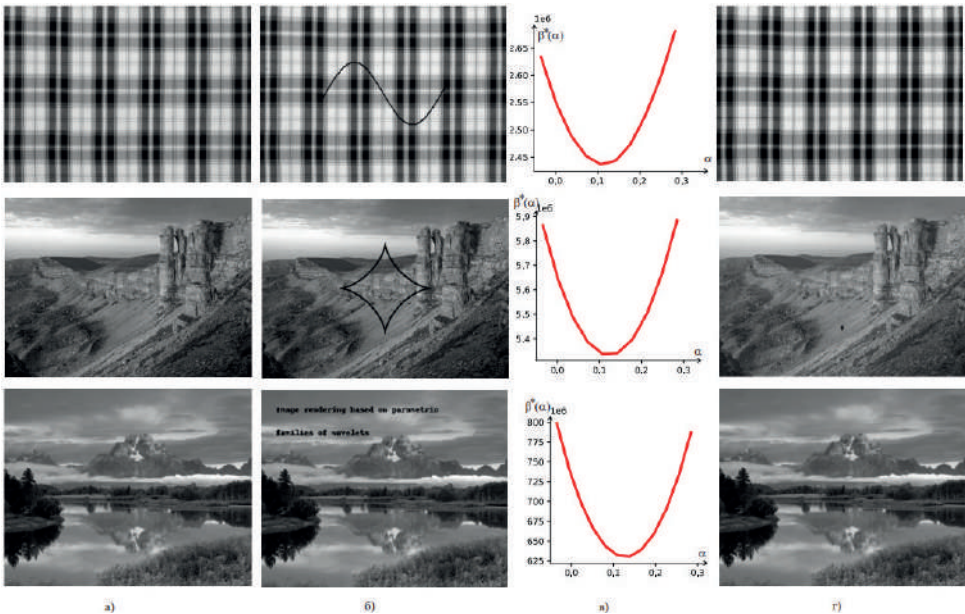


Рис 3. Подрисовка изображения. а) Исходное изображение, б) Поврежденное изображение, в) График функции $\beta^*(\alpha)$, г) Восстановленное изображение.



Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и

$$\Gamma_\lambda(\beta_1, \dots, \beta_n) = (t_{\lambda_1}(\beta_1) \ \dots \ t_{\lambda_m}(\beta_m)),$$

где

$$t_{\lambda_i}(\beta_i) = \begin{cases} \text{sign}(\beta_i)(|\beta_i| - \lambda_i), & |\beta_i| > \lambda_i, \\ 0, & |\beta_i| \leq \lambda_i. \end{cases}$$

Как показано в статье [4] при каждом значении α решение задачи минимизации

$$\beta^*(\alpha) = \min_{\beta \in \mathbf{R}^d} \frac{1}{2} \|P_\Lambda W_\alpha^{-1} \beta - P_\Lambda f\|_2^2 + \|\text{diag}(\lambda)\beta\| \quad (12)$$

можно найти по следующему алгоритму:

1. Выберем произвольный вектор $\beta_0 \in \mathbf{R}^d$.
2. Находим $\beta_{k+1}(\alpha) = \Gamma_\lambda(W_\alpha P_\Lambda f + \beta_k(\alpha) - W_\alpha P_\Lambda W_\alpha^{-1} \beta_k(\alpha))$, $k = 0, 1, \dots$

В статье [4] доказано, что существует $\beta^*(\alpha) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k(\alpha)$. Значение этого предела и является решением задачи (12). Таким образом, решение задачи (10), (11) можно найти, как $W_\alpha^{-1} \beta^*(\alpha^*)$, где $\alpha^* = \arg \min_\alpha \beta^*(\alpha)$. На рис. 3 представлены примеры восстановления поврежденных изображений. Нужно заметить, что рассмотренная задача является частным случаем общей задачи, представленной в начале раздела, в которой в качестве оператора A нужно выбрать P_Λ .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрено построение параметрического семейства вейвлет-систем на основе схемы подъема вейвлетов Хаара и улучшения его свойств. Исследованы гладкость полученных вейвлетов и их порядок. В статье рассмотрено одно из приложений такого параметрического семейства, предоставляющих разнообразные вейвлеты, в задаче подрисовки изображений. При решении такой задачи выбор вейвлета осуществлялся в процессе решения оптимизационной задачи.

Литература

1. *Frazier Michael W.* An introduction to wavelets through linear algebra. 1999. Springer. 503 p.
2. *Bertalmio M., Bertozzi A., and Sapiro G.*, Navier Stokes, fluid-dynamics and image and video inpainting, Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1 (2001), pp. 355–362.
3. *Chan T.F., Shen J., and Zhou H.M.*, Total variation wavelet inpainting, J. Math. Imaging Vision, 25 (2006), pp. 107–125.
4. *Cai J.F., Chan R.H., and Shen Z.*, A framelet-based image inpainting algorithm, Applied and Computational Harmonic Analysis 24 (2008), no. 2, 131–149.
5. *Cavaretta A.S., Dahmen W., and Micchelli C.A.*, Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, 1–186.



6. *Nira Dyn*, Analysis of Convergence and Smoothness by the Formalism of Laurent Polynomials. Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling, 2002, 51–68
7. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. Москва, 2004. – 280 с.
8. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 612 с.
9. *Sweldens Wim*, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and Computational Harmonic Analysis, volume3, issue 2, 1996, pp. 186–200.
10. *Sweldens Wim*, The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelets construction. In Wavelets Application in Signal and Image Processing III, volume 2569 of Processing of the SPIE, pp. 68–79. SPIE, Bellingham, WA, 1995.



Construction of a Parametric Family of Wavelets and Its Use in Image Processing

Yuri I. Bityukov*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)
Moscow, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>
e-mail: yib72@mail.ru

Pavel Y. Bityukov**

Moscow Power Engineering Institute (National Research University) (MPEI)
Moscow, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>
e-mail: p.bityukoff@yandex.ru

This article is devoted to the construction of a parametric family of biorthogonal wavelets according to the lifting scheme and subdivision schemes, and the use of such a family in the problem of image rendering when part of the pixel data in the image is missing or overwritten in some way. The parametric family of wavelets provides a parametric family of filters for restoring damaged images. With such a recovery, the desired wavelet is selected not from any general considerations, but from a parametric family in the process of solving an optimization problem.

Keywords: wavelet, lifting scheme, subdivision scheme, image processing.

For citation:

Bityukov Yu.I., Bityukov P.Yu. Construction of a Parametric Family of Wavelets and Its Use in Image Processing. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 7–22. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130401> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Frazier Michael W. An introduction to wavelets through linear algebra. 1999. Springer. 503 p.
2. Bertalmio M., Bertozzi A., and Sapiro G., Navier Stokes, fluid-dynamics and image and video inpainting, Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1 (2001), pp. 355–362.
3. Chan T.F., Shen J., and Zhou H.M., Total variation wavelet inpainting, *J. Math. Imaging Vision*, 25 (2006), pp. 107–125.
4. Cai J.F., Chan R.H., and Shen Z., A framelet-based image inpainting algorithm, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 24 (2008), no. 2, 131–149.

***Yuri I. Bityukov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>, e-mail: yib72@mail.ru

****Pavel Y. Bityukov**, Bachelor student, Moscow Power Engineering Institute (National Research University) (MPEI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>, e-mail: p.bityukoff@yandex.ru



5. Cavaretta A.S., Dahmen W., and Micchelli C.A., Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, 1–186.
6. Nira Dyn, Analysis of Convergence and Smoothness by the Formalism of Laurent Polynomials. *Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling*, 2002, 51–68
7. Blatter K. *Vejvlet-analiz. Osnovy teorii*. Moskva, 2004. – 280 p. (In Russ)
8. Novikov I.YA., Protasov V.YU., Skopina M.A.. *Teoriya vspleskov*. M.: FIZMATLIT. 2005. 612 p. (In Russ)
9. Sweldens Wim, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, volume3, issue 2, 1996, pp. 186–200.
10. Sweldens Wim, The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelets construction. In *Wavelets Application in Signal and Image Processing III*, volume 2569 of *Processing of the SPIE*, pp. 68–79. SPIE, Bellingham, WA, 1995.

Получена 28.09.2023

Received 28.09.2023

Принята в печать 20.10.2023

Accepted 20.10.2023

Исследование связи личностного ресурса и психологического благополучия студентов на начальном этапе обучения в вузе

Персиянцева С.В.*

Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)
ФГБНУ «Федеральный научный центр психологических
и междисциплинарных исследований»
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8158-5415>
e-mail: perssvetlana@yandex.ru

Артеменков С.Л.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>
e-mail: slart@inbox.ru

Исследование психологического благополучия учащихся становится одним из ключевых приоритетов в образовательных учреждениях, особенно в условиях переходных процессов в обществе. Целью исследования является изучение взаимосвязи личностного и семейного ресурса с психологическим благополучием и удовлетворенностью жизнью студенческой молодежи. В исследовании использованы следующие методики: Шкала психологического благополучия К. Рифф; Шкала удовлетворенности жизнью, Индекс хорошего самочувствия, Опросник толерантности к неопределенности, Тест жизнестойкости, Опросник общей самооффективности, Шкала самоконтроля, Тест смысложизненных ориентаций, авторская анкета с 15 вопросами и с закрытым списком возможных ответов. В измерениях по этим методикам приняли участие 41 студент в возрасте от 18 до 21 года. Исследование проводилось в два этапа. На первом этапе оценивались возможные корреляционные связи между психологическим благополучием и показателями личностного, семейного ресурса у всей группы респондентов. На втором этапе с целью дифференциации студентов по уровню психологического благополучия были выделены две группы: студенты с высоким уровнем психологического благополучия и студенты с низким уровнем психологического благополучия. Математико-статистический анализ проводился с помощью описательной статистики, U-критерия Манна-Уитни, корреляционного анализа Спирмена, процедур ранжирования, метода построения регуляризованных сетей частных корреляций. Исследование установило, что студенты, обладающие высоким уровнем удовлетворенности



жизнью и психологическим благополучием, проявляют более выраженные личностные ресурсы, такие как самоэффективность, жизнестойкость, контроль и позитивное отношение к окружающим и себе. Они также имеют ясные цели в жизни и достаточно удовлетворены их реализацией. Установлена связь хорошего самочувствия студентов с толерантностью к неопределенности. Чем выше уровень психологического благополучия, тем больше молодежь склонна принимать неопределенность, изменения и стремиться к решению сложных задач. Результаты исследования подчеркивают важность личностных и семейных ресурсов, а также позитивного отношения студентов к себе и окружающим для достижения высокого уровня психологического благополучия. Они также указывают на значимость для психологического благополучия фактора толерантности к неопределенности, связанного с хорошим самочувствием и стремлением к развитию и решению трудных жизненных задач. Сохранению психологического благополучия молодежи в образовательных условиях способствуют не только наращивание личностных ресурсов, но и функциональная роль педагога, продуманное, грамотно организованное проектирование образовательной среды.

Ключевые слова: психологическое благополучие, личный ресурс, семейный ресурс, самоэффективность, жизнестойкость, контроль, толерантность к неопределенности.

Для цитаты:

Персиянцева С.В., Артеменков С.Л. Исследование связи личностного ресурса и психологического благополучия студентов на начальном этапе обучения в вузе // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 23–44. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130402>

***Персиянцева Светлана Владимировна**, кандидат психологических наук, доцент кафедры общей психологии, ФГБОУ ВО Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), старший научный сотрудник лаборатории возрастной психогенетики, Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований (ФНЦ ПМИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8158-5415>, e-mail: perssvetlana@yandex.ru

****Артеменков Сергей Львович**, кандидат технических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: slart@inbox.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Технологические, социально-культурные, информационно-коммуникативных изменения в стране оказывают влияние на психологическое благополучие и ментальное состояние молодежи, её эмоциональное и психологическое состояние, а также на степень её социальной адаптации и самореализации. Поэтому, изучение и понимание механизмов, влияющих на психологическое благополучие молодежи в условиях транзитивного общества, является ключевой и актуальной задачей для современной психологии. От этого зависит не только личностное развитие молодежи, но и шире – социально-экономическое благополучие общества в целом.

В предыдущей работе было показано, что ценностные ориентации вносят значимый вклад в психологическое благополучие студентов [8]. Целью данного пилотажного исследования является изучение взаимосвязи личностного и семейного ресурса с психологическим благополучием и удовлетворенностью жизнью студенческой молодежи.

Теоретико-методологической основой пилотажного исследования является системно-деятельностный подход [3]; позитивная психология и исследования психологического благополучия [16, 24, 25]; психология актуального психологического благополучия в рамках эвдемонистического направления [10, 19, 23].

В рамках системно-деятельностного подхода к изучению личности личностный ресурс рассматривается как часть более обширной системы, включающей в себя различные факторы и элементы. Важными аспектами этого подхода являются системный взгляд на личность. Она рассматривается как часть более крупной системы, включающей в себя как внутренние, так и внешние факторы. Эти факторы взаимодействуют друг с другом, и личностный ресурс получает свой смысл в контексте этих взаимоотношений.

Системно-деятельностный подход включает в себя деятельностный аспект, т.е. личность рассматривается как активный участник деятельности, способный влиять на результаты этой деятельности. В этом ключе личностный ресурс приобретает значение и функциональную роль в контексте деятельности, а сама деятельность имеет динамичный и целенаправленный характер взаимодействия в социокультурных условиях. В системно-деятельностном подходе личностные ресурсы рассматриваются не изолированно, а в контексте системных связей и влияния на результаты деятельности. Этот подход способствует более глубокому пониманию того, как человек функционирует в различных контекстах и как его ресурсы могут быть оптимально задействованы.

В науке под личностными ресурсами понимают индивидуально-психологические особенности, связанные с высоким уровнем психологического благополучия и успешным осуществлением различных видов деятельности [15]. В качестве личностных ресурсов рассматривают такие конструкты как толерантность к неопределенности [18], оптимизм [14, 25], базисные убеждения [18], жизнестойкость [20], самоэффективность [12], локус контроля [22], чувство связности [11], и другие.

В отношении термина «психологическое благополучие» (ПБ) на сегодняшний день нет единого понимания. Ряд ученых считают, что ПБ – это системное качество человека, включающее в себя психологическое, психическое и психосоматическое здоровье [4, 7]. Другие рассматривают ПБ как субъективное ощущение счастья, при котором человек переживает преобладание положительных эмоций над негативными в контексте своей жизни [13]. Мы предлагаем рассматривать ПБ как комплексное и интегральное состояние, отражающее общую удовлетворенность и смысловую наполненность жизни человека. ПБ включает в себя ряд важных аспектов таких, как удовлетворенность жизнью, смысл и направленность, принятие себя и окружающего мира, стремление к развитию и самореализации. ПБ связано с ощущением, что жизнь имеет смысл и цель. Человек видит свое место в мире и чувствует, что его усилия



и деятельность направлены на что-то важное и ценное. Он имеет положительное отношение к собственной личности, включая принятие своих черт, особенностей и недостатков, которые необходимо преодолеть; положительно относится к другим, включая индивидуальные и культурные различия других людей, что способствует уменьшению конфликтов и улучшению отношений в социуме; стремится к развитию своего потенциала, достижению личных целей. Удовлетворенность жизнью – это чувство, когда человек оценивает свою жизнь как счастливую в целом. Это ощущение может проявляться как в радости от достижений и приятных моментов, так и в положительном отношении к переживанию негативных жизненных ситуаций, что помогает снизить стресс и справляться с жизненными трудностями.

Интересно, что первоначально основное внимания при изучении ПБ было уделено выборке взрослых, а качество жизни считалось основным критерием благополучия. Люди, которые в большей степени удовлетворены своей жизнью чаще испытывают позитивные переживания, они больше зарабатывают и у них успешная карьерная траектория. У них более крепкие отношения в семье, есть друзья. Быть благополучным и счастливым выгодно не только самому человеку, но и обществу в целом.

В последние 15–20 лет фокус внимания исследования ПБ начинает смещаться на обучающихся. В образовании наблюдается удивительная смена парадигм. Если раньше в образовании был акцент на академические достижения, то сегодня внимание уделяется как академическому успеху, так и личностному развитию учащихся, их ПБ в образовательном пространстве. В частности, благополучие школьников даже пытаются рассматривать вне зависимости от учебной деятельности, когда признается «важность самочувствия и переживаний школьника вне их связи с достижениями» [9, с. 26]

Основной гипотезой настоящего пилотажного исследования явилось предположение о наличии значимой положительной корреляции между показателями психического благополучия учащихся и конструктами личностного ресурса, включающего свойства личности, выраженность которых влияет на меру благополучия личности. Кроме того, было предположено, что вклад личностных ресурсов будет разным для студентов с высоким и низким уровнем психологического благополучия.

2. МЕТОДЫ И ИСПЫТУЕМЫЕ

Для проверки гипотез использовался следующий диагностический инструментарий. Для исследования психологического благополучия были выбраны: опросник Шкала психологического благополучия К. Рифф (*ШПБ*) с дополнительными показателями (шкала удовлетворенности жизнью, индекс хорошего самочувствия и др.). Показатели личностного ресурса исследовались с помощью методик: Тест смысловых жизненных ориентаций (*ТОЖ*), Тест жизнестойкости (*ТЖС*), Опросник толерантности к неопределенности (*ОТН*). Дополнительный диагностический инструментарий (*ДДИ*) включал Опросник общей самооценки и Шкалу самоконтроля. Социально-демографические факторы выявлялись с помощью авторской анкеты из



15 вопросов с закрытым списком возможных ответов. В частности, семейный ресурс как социально-демографический показатель, отражал уровень финансовой поддержки студента со стороны семьи в период обучения.

Выборку составили студенты второго курса в возрасте от 18 до 21 года (N = 41; M = 18,83; SD = 0,13).

3. ПРОЦЕДУРЫ

В таблице 1 представлены условные значения перечня 33 переменных исследования.

Таблица 1.

Условные значения показателей исследования

<i>Шкала психологического благополучия К. Рифф (ШПБ) с дополнительными показателями</i>			
PA	Позитивные отношения с другими	<i>Дополнительные показатели (Шевеленкова с соавторами)</i>	
A1	Автономия	EB	Баланс аффекта
EM	Управление средой	ML	Осмысленность жизни
PG	Личностный рост	OS	Человек как открытая книга
PL	Цель в жизни	A2	Автономия
SA	Самопринятие		
GR	Общий индекс ПБ		
<i>Тест смысложизненных ориентаций (ТОЖ)</i>			
LG	Цель в жизни	LI	Локус контроль – Я
LP	Процесс жизни	LL	Локус контроль – жизнь
LR	Результативность жизни	GL	Общий индекс (ОЖ)
<i>Тест жизнестойкости (ТЖС)</i>			
IN	Вовлеченность	RA	Принятие риска
CL	Контроль	VI	Общий индекс (ТЖ)
<i>Опросник толерантности к неопределенности (ОТН)</i>			
TU	Общий индекс толерантности к неопределенности	U1	Отношение к неопределенным ситуациям
AN	Отношение к новизне	U2	Предпочтение неопределенности
AC	Отношение к сложным задачам	U3	Принятие/избегание неопределенности
<i>Дополнительный диагностический инструментарий (ДДИ)</i>			
SE	Самоэффективность	FG	Индекс хорошего самочувствия
SC	Самоконтроль	LS	Шкала удовлетворенности жизнью
FR	Семейный ресурс	AG	Возраст студента

Для анализа полученных в исследовании данных использовались следующие статистические методы: корреляционный анализ Спирмена, процедуры ранжирования, непараметрический критерий для несвязанных выборок U-критерий Манна-Уитни и метод построения регуляризованных сетей частных корреляций [1, 2, 17]. Вычисления были проведены на языке программирования R.



4. РЕЗУЛЬТАТЫ

В коррелограмме (рис.1) представлены корреляции Спирмена, где степень насыщенности цвета и цвет колера определяют соответственно величину и знак корреляции (отрицательные корреляции показаны красным цветом).

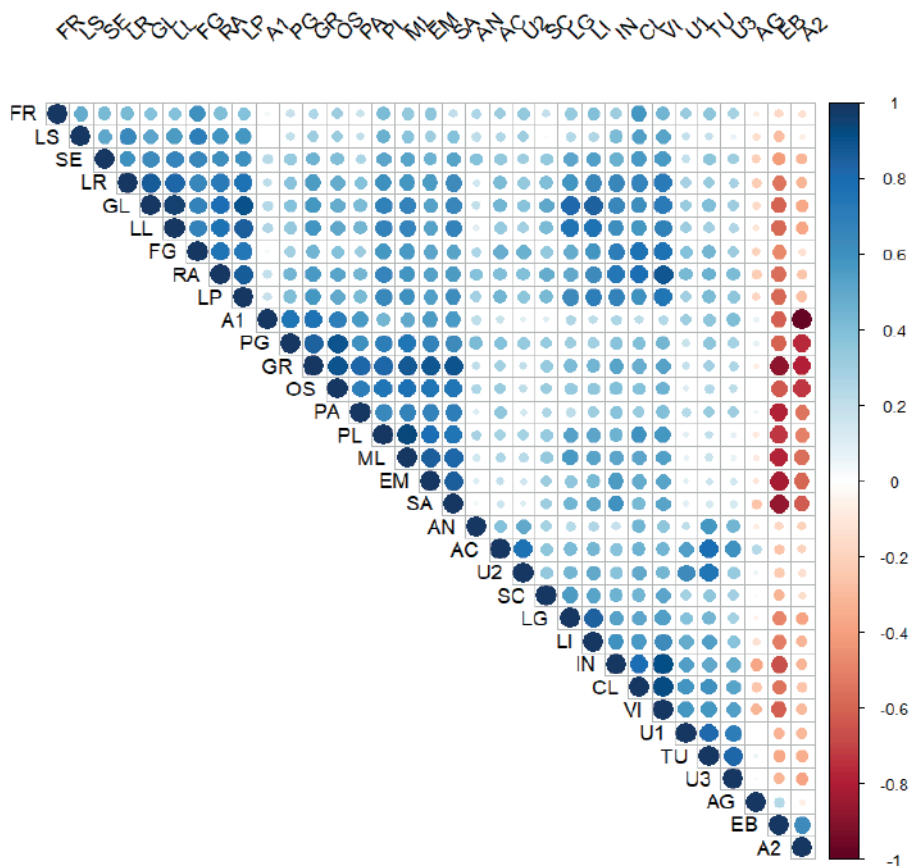


Рис. 1. Коррелограмма (результаты корреляционного анализа Спирмена)

В таблице 2 ниже приведен перечень значимых корреляций Спирмена между показателями исследования.



Таблица 2

**Перечень значимых корреляций Спирмена
между показателями исследования**

№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости	№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости
2	IN – AG	-0,378	*	189	SA – A1	0,562	***
3	VI – AG	-0,316	*	190	GR – A1	0,765	***
4	AN – TU	0,576	***	191	EB – A1	-0,617	***
5	AC – TU	0,799	***	192	ML – A1	0,494	**
6	U1 – TU	0,813	***	193	OS – A1	0,692	***
7	U2 – TU	0,741	***	194	A2 – A1	-0,973	***
8	U3 – TU	0,825	***	195	PG – EM	0,673	***
9	SE – TU	0,367	*	196	PL – EM	0,789	***
10	SC – TU	0,354	*	197	SA – EM	0,859	***
11	FR – TU	0,365	*	198	GR – EM	0,889	***
12	FG – TU	0,435	**	199	EB – EM	-0,829	***
13	PA – TU	0,329	*	200	ML – EM	0,851	***
14	A1 – TU	0,354	*	201	OS – EM	0,749	***
15	PG – TU	0,364	*	202	A2 – EM	-0,590	***
16	EB – TU	-0,366	*	203	LS – EM	0,308	*
17	A2 – TU	-0,348	*	204	IN – EM	0,555	***
18	IN – TU	0,490	**	205	CL – EM	0,485	**
19	CL – TU	0,601	***	206	RA – EM	0,539	***
20	RA – TU	0,468	**	207	VI – EM	0,523	***
21	VI – TU	0,573	***	208	GL – EM	0,540	***
22	GL – TU	0,404	**	209	LG – EM	0,351	*
23	LG – TU	0,438	**	210	LP – EM	0,543	***
24	LP – TU	0,417	**	211	LR – EM	0,553	***
25	LR – TU	0,322	*	212	LI – EM	0,427	**
26	LI – TU	0,542	***	213	LL – EM	0,538	***
27	AC – AN	0,380	*	214	PL – PG	0,704	***
28	U2 – AN	0,496	***	215	SA – PG	0,639	***
29	U3 – AN	0,447	**	216	GR – PG	0,848	***
30	SE – AN	0,384	*	217	EB – PG	-0,606	***
31	PG – AN	0,412	**	218	ML – PG	0,746	***
32	CL – AN	0,443	**	219	OS – PG	0,892	***
33	RA – AN	0,383	*	220	A2 – PG	-0,763	***
34	VI – AN	0,359	*	221	IN – PG	0,376	*
35	U1 – AC	0,543	***	222	CL – PG	0,396	*
36	U2 – AC	0,768	***	223	RA – PG	0,443	**
37	U3 – AC	0,593	***	224	VI – PG	0,431	**
38	SE – AC	0,344	*	225	GL – PG	0,386	*
39	SC – AC	0,362	*	226	LG – PG	0,309	*



№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости	№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости
40	FR – AC	0,315	*	227	LP – PG	0,401	**
41	FG – AC	0,471	**	228	LR – PG	0,377	*
42	PA – AC	0,355	*	229	LL – PG	0,342	*
43	PG – AC	0,386	*	230	SA – PL	0,746	***
44	OS – AC	0,321	*	231	GR – PL	0,830	***
45	IN – AC	0,375	*	232	EB – PL	-0,730	***
46	CL – AC	0,458	**	233	ML – PL	0,939	***
47	RA – AC	0,402	**	234	OS – PL	0,748	***
48	VI – AC	0,444	**	235	A2 – PL	-0,509	***
49	GL – AC	0,442	**	236	LS – PL	0,461	**
50	LG – AC	0,415	**	237	IN – PL	0,456	**
51	LP – AC	0,446	**	238	CL – PL	0,593	***
52	LR – AC	0,410	**	239	RA – PL	0,663	***
53	LI – AC	0,439	**	240	VI – PL	0,574	***
54	LL – AC	0,333	*	241	GL – PL	0,687	***
55	U2 – U1	0,635	***	242	LG – PL	0,537	***
56	U3 – U1	0,693	***	243	LP – PL	0,645	***
57	FR – U1	0,330	*	244	LR – PL	0,601	***
58	FG – U1	0,390	*	245	LI – PL	0,512	***
59	EB – U1	-0,328	*	246	LL – PL	0,676	***
60	IN – U1	0,545	***	247	GR – SA	0,894	***
61	CL – U1	0,586	***	248	EB – SA	-0,863	***
62	RA – U1	0,427	**	249	ML – SA	0,826	***
63	VI – U1	0,578	***	250	OS – SA	0,745	***
64	GL – U1	0,322	*	251	A2 – SA	-0,624	***
65	LG – U1	0,388	*	252	LS – SA	0,383	*
66	LI – U1	0,480	**	253	IN – SA	0,593	***
67	LL – U1	0,312	*	254	CL – SA	0,429	**
68	U3 – U2	0,335	*	255	RA – SA	0,555	***
69	SC – U2	0,344	*	256	VI – SA	0,525	***
70	FR – U2	0,349	*	257	GL – SA	0,658	***
71	FG – U2	0,469	**	258	LG – SA	0,445	**
72	IN – U2	0,374	*	259	LP – SA	0,630	***
73	CL – U2	0,491	**	260	LR – SA	0,634	***
74	RA – U2	0,398	**	261	LI – SA	0,502	***
75	VI – U2	0,434	**	262	LL – SA	0,671	***
76	GL – U2	0,377	*	263	EB – GR	-0,882	***
77	LG – U2	0,436	**	264	ML – GR	0,875	***
78	LP – U2	0,368	*	265	OS – GR	0,895	***
79	LR – U2	0,347	*	266	A2 – GR	-0,793	***
80	LI – U2	0,497	***	267	LS – GR	0,310	*
81	FG – U3	0,311	*	268	IN – GR	0,527	***



№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости	№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости
82	A1 – U3	0,403	**	269	CL – GR	0,471	**
83	EB – U3	-0,314	*	270	RA – GR	0,563	***
84	A2 – U3	-0,381	*	271	VI – GR	0,533	***
85	IN – U3	0,485	**	272	GL – GR	0,580	***
86	CL – U3	0,524	***	273	LG – GR	0,418	**
87	RA – U3	0,417	**	274	LP – GR	0,570	***
88	VI – U3	0,546	***	275	LR – GR	0,553	***
89	GL – U3	0,319	*	276	LI – GR	0,441	**
90	LP – U3	0,352	*	277	LL – GR	0,588	***
91	LI – U3	0,372	*	278	ML – EB	-0,776	***
92	SC – SE	0,343	*	279	OS – EB	-0,637	***
93	FR – SE	0,426	**	280	A2 – EB	0,632	***
94	FG – SE	0,656	***	281	IN – EB	-0,665	***
95	EM – SE	0,452	**	282	CL – EB	-0,540	***
96	PG – SE	0,335	*	283	RA – EB	-0,564	***
97	PL – SE	0,512	***	284	VI – EB	-0,614	***
98	SA – SE	0,526	***	285	GL – EB	-0,602	***
99	GR – SE	0,458	**	286	LG – EB	-0,482	**
100	EB – SE	-0,418	**	287	LP – EB	-0,589	***
101	ML – SE	0,528	***	288	LR – EB	-0,545	***
102	OS – SE	0,405	**	289	LI – EB	-0,519	***
103	A2 – SE	-0,315	*	290	LL – EB	-0,584	***
104	LS – SE	0,502	***	291	OS – ML	0,780	***
105	IN – SE	0,469	**	292	A2 – ML	-0,570	***
106	CL – SE	0,567	***	293	LS – ML	0,375	*
107	RA – SE	0,613	***	294	IN – ML	0,518	***
108	VI – SE	0,567	***	295	CL – ML	0,510	***
109	GL – SE	0,632	***	296	RA – ML	0,582	***
110	LG – SE	0,516	***	297	VI – ML	0,544	***
111	LP – SE	0,604	***	298	GL – ML	0,670	***
112	LR – SE	0,610	***	299	LG – ML	0,563	***
113	LI – SE	0,545	***	300	LP – ML	0,607	***
114	LL – SE	0,662	***	301	LR – ML	0,572	***
115	FG – SC	0,344	*	302	LI – ML	0,524	***
116	EM – SC	0,313	*	303	LL – ML	0,668	***
117	PG – SC	0,331	*	304	A2 – OS	-0,729	***
118	PL – SC	0,340	*	305	LS – OS	0,326	*
119	GR – SC	0,338	*	306	IN – OS	0,399	**
120	EB – SC	-0,314	*	307	CL – OS	0,387	*
121	ML – SC	0,341	*	308	RA – OS	0,528	***
122	OS – SC	0,321	*	309	VI – OS	0,452	**
123	IN – SC	0,457	**	310	GL – OS	0,490	**



№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости	№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости
124	CL – SC	0,448	**	311	LG – OS	0,337	*
125	RA – SC	0,489	**	312	LP – OS	0,495	**
126	VI – SC	0,517	***	313	LR – OS	0,485	**
127	GL – SC	0,503	***	314	LI – OS	0,351	*
128	LG – SC	0,553	***	315	LL – OS	0,506	***
129	LP – SC	0,424	**	316	IN – A2	-0,312	*
130	LR – SC	0,404	**	317	GL – A2	-0,361	*
131	LI – SC	0,528	***	318	LG – A2	-0,387	*
132	LL – SC	0,414	**	319	LR – A2	-0,319	*
133	FG – FR	0,609	***	320	LI – A2	-0,313	*
134	EM – FR	0,368	*	321	LL – A2	-0,371	*
135	PL – FR	0,418	**	322	IN – LS	0,419	**
136	ML – FR	0,345	*	323	CL – LS	0,542	***
137	OS – FR	0,316	*	324	RA – LS	0,588	***
138	LS – FR	0,488	**	325	VI – LS	0,521	***
139	IN – FR	0,318	*	326	GL – LS	0,511	***
140	CL – FR	0,576	***	327	LP – LS	0,578	***
141	RA – FR	0,404	**	328	LR – LS	0,643	***
142	VI – FR	0,446	**	329	LL – LS	0,559	***
143	GL – FR	0,385	*	330	CL – IN	0,785	***
144	LG – FR	0,332	*	331	RA – IN	0,734	***
145	LP – FR	0,385	*	332	VI – IN	0,919	***
146	LR – FR	0,425	**	333	GL – IN	0,656	***
147	LI – FR	0,395	*	334	LG – IN	0,534	***
148	LL – FR	0,389	*	335	LP – IN	0,671	***
149	PA – FG	0,316	*	336	LR – IN	0,651	***
150	EM – FG	0,510	***	337	LI – IN	0,600	***
151	PL – FG	0,573	***	338	LL – IN	0,617	***
152	SA – FG	0,521	***	339	RA – CL	0,780	***
153	GR – FG	0,441	**	340	VI – CL	0,923	***
154	EB – FG	-0,472	**	341	GL – CL	0,615	***
155	ML – FG	0,561	***	342	LG – CL	0,512	***
156	OS – FG	0,383	*	343	LP – CL	0,597	***
157	LS – FG	0,698	***	344	LR – CL	0,660	***
158	IN – FG	0,704	***	345	LI – CL	0,560	***
159	CL – FG	0,761	***	346	LL – CL	0,571	***
160	RA – FG	0,758	***	347	VI – RA	0,887	***
161	VI – FG	0,766	***	348	GL – RA	0,781	***
162	GL – FG	0,672	***	349	LG – RA	0,495	***
163	LG – FG	0,488	**	350	LP – RA	0,862	***
164	LP – FG	0,732	***	351	LR – RA	0,723	***
165	LR – FG	0,654	***	352	LI – RA	0,634	***



№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости	№	Коррелируемые факторы	Корреляция	Уровень значимости
166	LI – FG	0,586	***	353	LL – RA	0,769	***
167	LL – FG	0,672	***	354	GL – VI	0,724	***
168	A1 – PA	0,563	***	355	LG – VI	0,547	***
169	EM – PA	0,673	***	356	LP – VI	0,748	***
170	PG – PA	0,609	***	357	LR – VI	0,727	***
171	PL – PA	0,644	***	358	LI – VI	0,633	***
172	SA – PA	0,701	***	359	LL – VI	0,682	***
173	GR – PA	0,821	***	360	LG – GL	0,819	***
174	EB – PA	-0,787	***	361	LP – GL	0,905	***
175	ML – PA	0,680	***	362	LR – GL	0,863	***
176	OS – PA	0,698	***	363	LI – GL	0,841	***
177	A2 – PA	-0,546	***	364	LL – GL	0,953	***
178	IN – PA	0,376	*	365	LP – LG	0,635	***
179	CL – PA	0,326	*	366	LR – LG	0,581	***
180	RA – PA	0,436	**	367	LI – LG	0,844	***
181	VI – PA	0,397	*	368	LL – LG	0,752	***
182	GL – PA	0,415	**	369	LR – LP	0,766	***
183	LP – PA	0,420	**	370	LI – LP	0,708	***
184	LR – PA	0,386	*	371	LL – LP	0,858	***
185	LL – PA	0,437	**	372	LI – LR	0,657	***
186	EM – A1	0,555	***	373	LL – LR	0,826	***
187	PG – A1	0,743	***	374	LL – LI	0,765	***
188	PL – A1	0,440	**				

Примечание: * – $p < 0,05$; ** – $p < 0,01$; *** – $p < 0,001$.

Корреляционный анализ Спирмена показал наличие общих положительных корреляций между общим индексом ПБ (**GR**) и индексом хорошего самочувствия **FG**, а также между **GR** и показателем удовлетворенностью жизнью **LS** ($r = 0,44$, $p < 0,01$; $r = 0,31$, $p < 0,05$ – соответственно).

Высокий уровень значимости был получен между общим индексом **GR** и общим индексом смысложизненных ориентаций **GL** ($r = 0,58$, $p < 0,001$), а также **GR** и общим индексом жизнестойкости **VI** ($r = 0,53$, $p < 0,001$). Были выявлены положительные корреляции между **VI** и индексом хорошего самочувствия **FG** ($r = 0,77$, $p < 0,001$), и шкалой удовлетворенностью жизнью **LS** ($r = 0,52$, $p < 0,001$).

Положительная корреляция была выявлена также между общим индексом **GR** и самооффективностью **SE**, а также между **GR** и самоконтролем **SC** ($r = 0,46$, $p < 0,01$; $r = 0,34$, $p < 0,05$ – соответственно). Интересно, что не были выявлены корреляционные связи между общим индексом ПБ и показателями по методике толерантность к неопределенности (**ОТН**). Однако, были обнаружены положительные корреляции между индексом хорошего самочувствия **FG** и опросником толерантность к неопределенности как по общему показателю **TU** ($r = 0,44$, $p < 0,01$), так и по шкалам опросника.



Аналогичные корреляции на уровне значимости 0,01 были выявлены между индексом хорошего самочувствия **FG** и предпочтением неопределенности **U2** ($r = 0,47$), а также между **FG** и отношением к сложным задачам **AC** ($r = 0,47$); на уровне значимости 0,05, между **FG** и отношением к неопределенным ситуациям **U1** ($r = 0,39$), а также между **FG** и принятием/избеганием неопределенности **U3** ($r = 0,31$). Корреляция между **FG** и отношением к новизне **AN** ($r = 0,27$) является менее значимой.

На основании полученных результатов можно предположить, что чем выше показатель **FG** хорошего самочувствия у студентов (наличие хорошего настроения, сна, ощущения бодрости, активности, энергичности, восприятия жизни, наполненной интересными событиями), тем выше у них потребность в изменениях, новизне, в решении сложных задач. Это можно объяснить, тем, что когда мы находимся в хорошем физическом и психическом состоянии, то чувствуем себя более уверенно и готовы к решению сложных задач. Однако, этот процесс может потребовать от нас переживания неопределенности и неизвестности. Именно в таких ситуациях наше желание решить проблему может побудить нас к поиску новых и нестандартных решений. Поэтому, некоторая степень неопределенности может стать для нас сильным стимулом для развития и реализации наших целей.

На рисунке 2 ниже представлена регуляризованная сеть частных корреляций, построенная по методу *glasso*. Согласно теории [1, 2], она в большей степени отражает реальные зависимости между переменными. Можно видеть, что в сети частных корреляций показатели отдельных опросников в той или иной мере представлены в виде отдельных кластеров. Этот факт отражает внутреннюю валидность использованных диагностических методик.

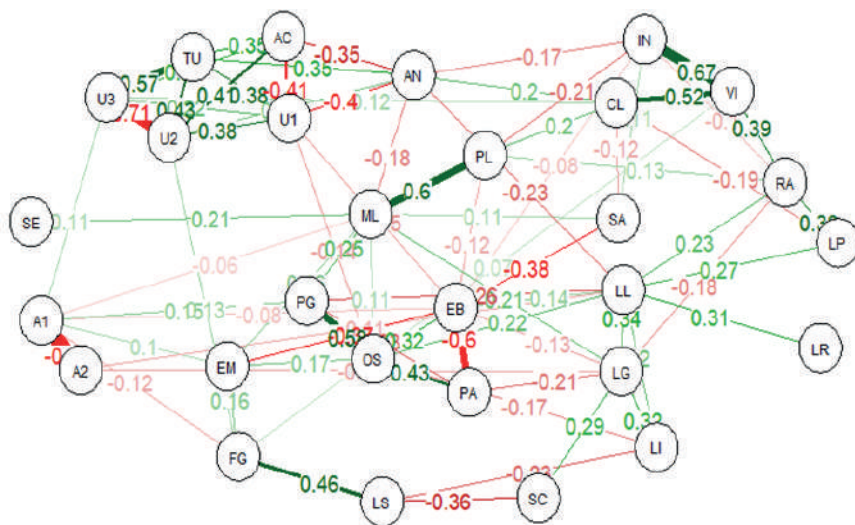


Рис. 2. Общий вид регуляризованной сети *glasso*, показывающей частные корреляции между показателями исследования

Сеть glasso показывает положительную связь удовлетворенности жизнью **LS** и индексом хорошего самочувствия **FG** ($r = 0,46$). Частные корреляции в сети glasso подтверждают связь показателя «человек как открытая книга» **OS** с позитивным отношением к другим **PA**, с личностным ростом **PG**, осмысленностью жизни **ML** ($r = 0,43$, $r = 0,58$, $r = 0,25$), это означает, что позитивное общение с другими людьми и поддержка социальной среды являются важными факторами для ПБ студентов. Личностный рост связан с процессом самоосознания и развития. По мере развития человек расширяет свои возможности, больше узнает о себе и мире, испытывает удовлетворенность жизнью, что помогает развить мотивацию к достижению своих целей и реализации своего потенциала.

Таким образом, позитивные отношения, динамика личностного роста и осмысленность жизни важны для того, чтобы студенты могли полноценно функционировать в своей жизни и достигать своих жизненных, учебных целей и задач.

Кроме положительных с сети на рисунке 2 имеются отрицательные частные корреляции. Например, между показателем баланс аффекта **EB** и переменными: позитивные отношения с другими **PA**, самопринятие **SA**, умение управлять средой **EM** ($r = -0,60$, $r = -0,38$, $r = -0,37$). Согласно методике [10] показатель баланс эффекта показывает общую эмоциональную оценку респондентов и их жизни, при этом, чем выше этот показатель, тем больше у них проявляется негативная самооценка, неудовлетворенность и недовольство обстоятельствами собственной жизни, неспособность поддерживать позитивные отношения с другими, неверие в свои силы и недооценка собственных способностей преодолевать жизненные препятствия, усваивать новые умения и навыки. Можно думать, что негативная самооценка, недовольство и неудовлетворенность обстоятельствами собственной жизни, ощущение собственной никчемности и бессилия приводят к неспособности поддерживать позитивные отношения с окружающими, невозможности изменить или улучшить условия своей жизни и в результате формируют негативное отношение к себе и собственной жизни.

Семейный ресурс **FR** ($M = 3,98$; $SD = 0,15$) оценивался в исследовании как финансовая поддержка студента семьей в период учебы по шестибальной шкале, где 1 – «не хватает денег на питание» и 6 – «могу ни в чём себе не отказывать». Почти половина 46 % студентов отметили, что им хватает денег на питание и одежду, но они не могут позволить себе купить такие дорогие вещи, как смартфон или ноутбук, даже если они нужны для учебы.

Установлено, что чем выше финансовая поддержка студента со стороны семьи, тем лучше себя чувствует студент; у него более высокие показатели удовлетворенности жизнью, самоэффективности и жизнестойкости. В таблице 3 ниже показаны статистические показатели, корреляции по Спирмену и уровень значимости между семейным ресурсом **FR** и двенадцатью показателями психологического благополучия и личностного ресурса: индекс хорошего самочувствия **FG**, контроль **CL**, удовлетворенность жизнью **LS**, самоэффективность **SE**, жизнестойкость **VI**, а также показатели психологического благополучия и смысложизненные ориентации по группе в целом.



Корреляции между семейным ресурсом **FR** и всеми показателями по опроснику толерантности к неопределенности (*OTH*) были значимы на уровне $p < 0,05$. Были получены следующие корреляции между семейным ресурсом и показателями: общий индекс толерантности к неопределенности **TU** ($r = 0,37$), предпочтение неопределенности **U2** ($r = 0,35$), осмысленность жизни **ML** ($r = 0,35$), вовлеченность **IN** ($r = 0,32$), отношение к сложным задачам **AC** ($r = 0,32$). Между семейным ресурсом **FR** и общим показателем ПБ **GR** не было выявлено достоверных корреляционных связей.

Полученные результаты позволяют предположить, что студенты, имеющие финансовую поддержку семьи, отвечающую их потребностям, чувствуют себя более комфортно и защищены. Они более удовлетворены своей жизнью, чем их одноклассники. Эти студенты обладают высокой устойчивостью. Они нейтрально или позитивно относятся к сложной, меняющейся ситуации/задаче. Любую неопределенную ситуацию они рассматривают как новые возможности: возможность выбирать, развиваться и получать новый опыт.

Таблица 3

**Сравнительный анализ показателей семейного ресурса FR
с показателями психологического благополучия и личностного ресурса**

Обозначения	Индекс хорошего самочувствия	Контроль	Шкала удовлетвор. жизнью	Самоэффективность	Жизнестойкость	Результативность	Принятие риска	Цель в жизни	Управление средой	Локус контроль – Я	Локус контроль – жизнь	Процесс жизни
	FG	CL	LS	SE	VI	LR	RA	PL	EM	LI	LL	LP
M	51,80	13,77	23,40	30,02	44,33	25,93	9,83	63,54	59,09	20,91	32,39	28,95
SD	2,87	0,64	0,74	0,63	1,80	0,94	0,46	1,64	1,68	0,65	0,96	1,00
Корреляция с FR и уровень значимости	0,61	0,58	0,49	0,43	0,45	0,43	0,41	0,42	0,37	0,39	0,39	0,39
	p = 0.001		p = 0.01					p = 0.05				

В отечественной психологии понятие интолерантность к неопределённости сближается с понятием ригидности, а толерантность – с понятием жизнестойкости. В данном исследовании получены достаточно большие положительные корреляции между



толерантностью **TU** и жизнестойкостью **VI** ($r = 0,57$ при $p < 0,001$), т. е. чем больше толерантность, тем выше жизнестойкость.

Для проверки гипотезы о том, что вклад личностных ресурсов будет разным для студентов с высоким уровнем ПБ и для студентов с низким уровнем ПБ, выборка была разделена на две подгруппы по общему индексу ПБ **GR**. Первая подгруппа состояла из студентов с высоким уровнем **GR** > 414 баллов (нормативные значения по Лепешинскому [5]). Во вторую подгруппу были включены студенты с низким уровнем **GR** < 314 баллов. В таблице 4 представлены средние значения показателей личностных ресурсов двух групп студентов с высоким и низким уровнем общего индекса ПБ **GR** и приведены результаты их сравнения по **U**-критерию.

Как видно из таблицы 3, у студентов с высоким уровнем ПБ значимо выше хорошее самочувствие и уровень удовлетворенности жизнью, показатели по шкалам ПБ и конструктам личностного ресурса, чем у студентов с низким уровнем ПБ. Процедура ранжирования выявила наиболее выраженные различия показателей среди студентов с разным уровнем ПБ (рис. 3).

Студенты с высоким уровнем ПБ (рис. 3) имеют существенно более хорошее самочувствие, позитивное самопринятие, высокий уровень жизнестойкости, контроля, чем студенты с низким уровнем ПБ. Студенты с высоким уровнем ПБ удовлетворены своей жизнью, имеют планы и цели, ориентированы на их реализацию в будущем. Они удовлетворены своими успехами в учебе и уверены, что способны контролировать свою жизнь, свободно принимать решения и воплощать их в жизнь. При этом временные трудности или стресс на своем жизненном пути они воспринимают как менее значимые. Такие студенты имеют способность справляться с жизненными трудностями и стрессовыми ситуациями без серьезных нарушений своего психического и физического здоровья. Возможно, такая жизнестойкость строится на осознании своих сильных и слабых сторон, принятии ответственности за свои действия, наличии сильной мотивации и умении находить решения проблем.

Таблица 4

Средние показатели личностных ресурсов студентов с высоким и низким уровнем общего индекса ПБ **GR и их сравнение по **U**-критерию**

Показатели		Высокий ПБ	Низкий ПБ	U-критерий
Позитивное отношение	PA	69,7	49,8	,004**
Автономия	A1	66,3	46,6	,0022**
Управление средой	EM	71,7	45,6	,0022**
Личностный рост	PG	76,0	56,4	,0027**
Цель в жизни	PL	72,5	48,2	,0022**
Самопринятие	SA	72,8	43,4	,0022**
Общий индекс ПБ	GR	429,0	290,0	,0022**
Удовлетворенность жизнью	LS	26,0	18,8	,02*
Индекс хорошего самочувствия	FG	67,2	34,4	,005**
Жизнестойкость	VI	56,0	34,0	,007**



Показатели		Высокий ПБ	Низкий ПБ	U-критерий
Вовлеченность	IN	26,0	16,6	,0022**
Контроль	CL	17,6	10,4	,0143*
Принятие риска	RA	12,4	7,0	,0071**
Смыслжизненные ориентации	GL	116,3	83,0	,004**
Цель в жизни	LG	35,8	25,8	,043*
Процесс жизни	LP	34,2	21,6	,0022**
Результативность жизни	LR	30,7	17,6	,0022**
Локус контроля – Я	LI	24,0	16,8	,0143*
Локус контроля – Жизнь	LL	36,8	25,6	,0027**
Самоконтроль	SC	44,6	40,2	,391
Самоэффективность	SE	32,8	28,0	0,23*

Примечание. ** $p < 0.01$; * $p < 0.05$

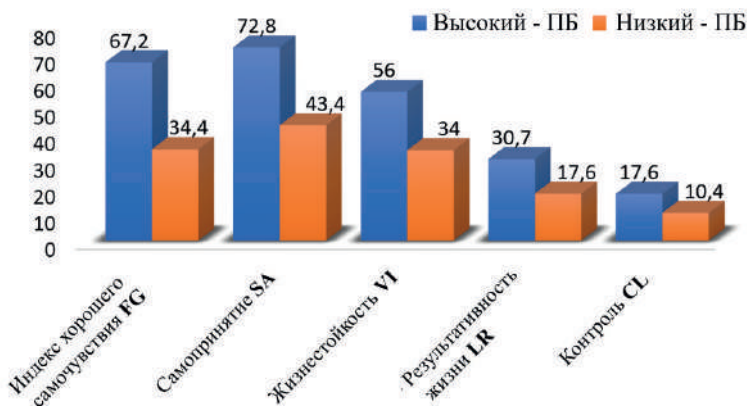


Рис. 3. Показатели психологических характеристик студентов с разным уровнем психологического благополучия (ПБ)

Таким образом, можно утверждать, что студенты с высоким уровнем ПБ обладают большим вкладом личностного ресурса, чем студенты с низким уровнем ПБ. Студенты с низким уровнем ПБ могут испытывать большие трудности в управлении средой и своей жизнью, в управлении учебным процессом, сомневаться в своих способностях и быть более подвержены стрессу. Все это может влиять на их способность максимально использовать свои личностные ресурсы.

5. ДИСКУССИЯ

Полученные результаты позволяют подтвердить обе гипотезы данного пилотного исследования, приведенные во введении. В частности, имеет место значимая положительная корреляция между конструктами личностного ресурса и показателями



психологического благополучия (ПБ) студентов. Также подтвердилось, что вклад личностных ресурсов будет выше у студентов с высоким уровнем ПБ, чем у студентов с низким уровнем ПБ.

Следует отметить, что в процессе исследования в качестве существенного фактора психологического благополучия студентов выступили полисубъектные отношения педагог-учащиеся». Хотя этот фактор напрямую не измерялся, вполне понятно, что студенты подвержены влиянию личности педагога, и что педагог, в ходе осуществления профессиональной деятельности, может оказывать значительное влияние на студентов. Специалисты отмечают, что педагог, обладающий «высоким уровнем развития интегральных характеристик личности» [6, с. 4], в значительной степени обеспечивает ПБ учащихся и создает полноценную полисубъектную общность. Педагог через свой подход к обучению, коммуникации и взаимодействию может оказывать влияние на саморазвитие студентов, формирование у них таких качеств, как ответственность, целеустремленность, творческий подход к решению задач и другие. Кроме того, личность педагога может помочь студентам осознать и развить свои потенциальные возможности, повысить самооценку и уверенность в себе. В связи с этим так важно, чтобы педагог, работающий в сфере высшего образования, поддерживал и развивал свой высокий уровень самоконтроля, самоэффективности и жизнестойкости.

Продуманное проектирование образовательной среды учитывает потребности и интересы учащихся, а также способствует их мотивации к обучению. В процессе разработки образовательного пространства учитываются возрастные и индивидуальные характеристики учащихся, а также применяются современные педагогические и психологические методы.

Организация групповой и индивидуальной работы, предоставление возможности для самостоятельного и проблемного мышления, развитие коммуникативных навыков и кооперативного взаимодействия – все это является важными аспектами продуманного проектирования образовательной среды. Все это вместе способствует психологическому благополучию и повышению личностного ресурса учащихся.

Полученные в пилотном исследовании данные позволяют более глубоко понять, какие механизмы формируют и повышают уровень психологического благополучия, как показатели личностного ресурса связаны с психологическим благополучием и как финансовая поддержка семьи влияет на психологическое благополучие студентов.

Исследование также позволяет оценить важность и необходимость развития психологического благополучия для продуктивной учебной деятельности. Психологическое благополучие включает в себя такие аспекты, как позитивные эмоции, чувство удовлетворенности жизнью, высокий уровень самодостаточности, эффективное управление эмоциями и стрессом. Важность этих факторов для учебной деятельности заключается в том, что они способствуют улучшению мотивации, концентрации внимания, креативности и способности к обучению. В свою очередь, повышение уровня психологического благополучия может привести к улучшению успеваемости и общего благополучия студента.



6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выявлены положительные корреляции между психологическим благополучием и хорошим самочувствием студентов, их удовлетворенностью жизнью. Получены положительные корреляции между психологическим благополучием и такими личностными ресурсами, как жизнестойкость, самоэффективность, смысложизненные ориентации. Не выявлены корреляционные связи между психологическим благополучием и семейным ресурсом, а также между психологическим благополучием и показателями по толерантности к неопределенности. Однако, обнаружены положительные корреляции между семейным ресурсом и хорошим самочувствием студентов, а также между их хорошим самочувствием и всеми показателями по опроснику «толерантность к неопределенности».

Исследование установило, что студенты, обладающие высоким уровнем удовлетворенности жизнью и психологическим благополучием, проявляют более выраженные личностные ресурсы, такие как самоэффективность, жизнестойкость, контроль и позитивное отношение к окружающим и себе. Они также имеют ясные цели в жизни и достаточно удовлетворены их реализацией.

Важным результатом является связь хорошего самочувствия студентов с толерантностью к неопределенности. Чем выше уровень хорошего самочувствия, тем больше молодежь склонна принимать неопределенность, изменения и стремиться к решению сложных задач.

Результаты исследования подчеркивают важность личностных ресурсов и позитивного отношения к себе и окружающим для достижения высокого уровня психологического благополучия. Оно также указывает на значимость толерантности к неопределенности как фактора, связанного с хорошим самочувствием и стремлением к развитию и решению трудных жизненных задач.

Литература

1. Артеменков С.Л. Проблемы построения и анализа упорядоченных сетей частных корреляций в психологических исследованиях // Моделирование и анализ данных. 2021. № 3. С. 36–56. DOI: 10.17759/mda.2021110303
2. Артеменков С.Л. Упорядоченные сети частных корреляций в психологических исследованиях // Моделирование и анализ данных. 2021. № 2. С. 31–50. DOI: 10.17759/mda.2021110202
3. Асмолов А.Г. Системно-деятельностный подход в разработке стандартов нового поколения // Педагогика. 2009. No 4. С. 18–22.
4. Воронина А.В. Проблема психического здоровья и благополучия человека: обзор концепций и опыт структурно-уровневого анализа // Сибирский психологический журнал. 2005. № 21. С. 142–146.
5. Лепешинский Н.Н. Адаптация опросника «Шкала психологического благополучия» К. Рифф // Психологический журнал (Минск). 2007. № 3. С. 24–37.
6. Митина Л.М., Митин Г.В. Структурно-содержательная модель новой практики психологической подготовки педагогов // Актуальные проблемы психологического знания. 2023. № 1 (62). С. 122–143. DOI: 10.51944/20738544_2023_1_122.



7. Овчарова П.В. Разработка показателей и анализа факторов развития личностного потенциала и психологического благополучия учащихся в системе общего образования. В кн.: Психологическое благополучие личности в современном образовательном пространстве / сост. Ю.В. Братчикова. Екатеринбург: УРФУ, 2013. С. 11–16.
8. Персиянцева С.В. Психологическое благополучие и ценностные ориентации в структуре личностного потенциала российской молодежи. В кн.: Герценовские чтения: психологические исследования в образовании / под ред. С.А. Безгодова. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена, 2022. С. 321–328. DOI: 10.33910/herzenpsyconf-2022-5-41
9. Поливанова К.Н. Новый образовательный дискурс: благополучие школьников // Культурно-историческая психология. 2020. Том 16. № 4. С. 26–34. DOI: 10.17759/chp.2020160403
10. Шевеленкова Т.Д., Фесенко П.П. Концепция психологического благополучия личности и методика его исследования. В кн.: Новые теоретико-методологические подходы к исследованию в клинической психологии / под ред. Т.Д. Шевеленковой. М.: Левь, 2013. С. 9–48.
11. Antonovsky A. The Sense of Coherence as a Determinant of Health // Behavioral Health: A Handbook of Health Enhancement and Disease Prevention / ed. by J.D. Matarazzo, N. Miller. New York, 1984. 194–202.
12. Bandura A. Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavior change // Psychological Review. 1977. Vol. 84. 191–215.
13. Bradburn N.M. The structure of psychological well-being. Chicago: Aldine, 1969. 318 p.
14. Carver C.S., Scheier M.F. Optimism // Handbook of Positive Psychology / ed. by C.R. Snyder, S.J. Lopez. Oxford University Press, 2002. 221–244.
15. Diener E., Fujita F. Resources, personal striving, and subjective wellbeing: A nomothetic and ideographic approach // Journal of Personality and Social Psychology. 1995. Vol. 68. 926–935.
16. Diener E., Wirtz D., Tov W., Kim-Prieto C., Choi D., Oishi S., Biswas-Diener R. New measures of well-being: Flourishing and positive and negative feelings // Social Indicators Research. 2009. Vol. 97 (2). 143–156.
17. Epskamp S., Fried E.I. A tutorial on regularized partial correlation networks // Psychological Methods. 2018. № 4. 617–634.
18. Janoff-Bulman R. Assumptive worlds and the stress of traumatic events: Application of the schema construct // Social Cognition. 1989. № 7. 113–136.
19. Keyes C.L.M., Shmotkin D., Ryff C.D. Optimizing well-being: The empirical encounter of two traditions // Journal of Personality and Social Psychology. 2002. 82(6). 1007–1022.
20. Maddi S. The Story of Hardiness: 20 Years of Theorizing, Research and Practice // Consulting Psychology Journal. 2001. Vol. 54. 173–185.
21. McLain D.L. The MSTAT-I: A new measure of an individual's tolerance for ambiguity // Educational and Psychological Measurement. 1993. Vol. 53. 183–189.
22. Rotter J.B. Some problems and misconceptions related to the construct of internal versus external control of reinforcement // Journal of Consulting and Clinical Psychology. 1975. Vol. 43. 56–67.
23. Ruff C.D., Singer B. Psychological Well-Being: Meaning, Measurement, and Implications for Psychotherapy Research // Psychotherapy and Psychosomatics. 1996. Vol. 65 (1). 14–23.
24. Seligman M.E.P. Learned Optimism: How to Change Your Mind and Your Life with a New Preface. New York: A Division of Random House, 2006. 337 p.
25. Shamionov R.M., Grigoryeva M.V., Grinina E.S., Sozonnik A.V. Characteristics of Academic Adaptation and Subjective Well-Being in University Students with Chronic Diseases // European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education. 2020. № 10. 816–831. DOI: 10.3390/ejihpe10030059



Study of the Connection between Personal Resources and Psychological Well-being of Students at the Initial Stage of University Education

Svetlana V. Persiyantseva*

Russian State University for the Humanities (RSUH),

Center for Interdisciplinary Research on Creativity and Giftedness

Psychological Institute of Russian Academy of Education (PI RAE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8158-5415>

e-mail: perssvetlana@yandex.ru

Sergei L. Artemenkov**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>

e-mail: slart@inbox.ru

The study on the psychological well-being of students is becoming one of the key priorities in educational institutions, especially during changes in society. The purpose of the study is to investigate the relationship between personal and family resources and the psychological well-being and life satisfaction of student youth. The following methods were used in the study: Ryff Scales of Psychological Well-Being, Life Satisfaction Scale, Well-Being Index, Tolerance-intolerance of Ambiguity Questionnaire, Hardiness Survey, General Self-Efficacy Questionnaire, Self-Control Scale, Life Meaning Orientations Test, Author's questionnaire with 15 questions and a closed list of possible answers. 41 students aged 18 to 21 years took part in measurements using these methods. The study was carried out in two stages. At the first stage, possible correlations between psychological well-being and indicators of personal and family resources were assessed for the entire group of respondents. At the second stage, in order to differentiate students by level of psychological well-being, two groups were identified: students with a high level of psychological well-being and students with a low level of psychological well-being. Mathematical and statistical analysis was carried out using descriptive statistics, the Mann-Whitney U test, Spearman correlation analysis, ranking procedures, and the method of constructing regularized networks of partial correlations. The study found that students with high levels of life satisfaction and psychological well-being exhibited more pronounced personal resources, such as self-efficacy, vitality, control and a positive attitude towards others and themselves. They also have clear goals in life and are quite satisfied with their implementation. A connection has been established between students' well-being and tolerance for uncertainty. The higher the level of psychological well-being, the more students are inclined to accept uncertainty, change and strive to solve complex problems. The results of the study emphasize the importance of personal and family resources, as well as students' positive attitudes towards themselves and others in achieving a high level of psychological well-being. They also indicate the importance for psychological well-being of the factor of tolerance to uncertainty associated with good health and the desire to develop and



solve difficult life problems. The preservation of the psychological well-being of young people in educational settings is facilitated not only by the increase in personal resources, but also by the functional role of the teacher, thoughtful, well-organized design of the educational environment.

Keywords: psychological well-being, personal resource, family resource, self-efficacy, vitality, control, tolerance for uncertainty.

For citation:

Persiyantseva S.V., Artemenkov S.L. Study of the Connection between Personal Resources and Psychological Well-being of Students at the Initial Stage of University Education. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 23–44. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130402> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Svetlana V. Persiyantseva**, Candidate of Psychological Sciences, Associate Professor of the Department of General Psychology, Russian State University for the Humanities (RSUH), Senior Researcher at the Laboratory of Age-related Psychogenetics, Federal Scientific Center Center for Interdisciplinary Research on Creativity and Giftedness, Psychological Institute of Russian Academy of Education (PI RAE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8158-5415>, e-mail: perssvetlana@yandex.ru

****Sergei L. Artemenkov**, Candidate of Technical Sciences, Professor, Moscow State University Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: slart@inbox.ru

References

1. Artemenkov S.L. The Issues of Construction and Analysis of Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research. *Modelirovanie i analiz dannykh [Modelling and Data Analysis]*. 2021. 3. 36–56. DOI: [10.17759/mda.2021110303](https://doi.org/10.17759/mda.2021110303) (In Russ., abstr. in Engl.)
2. Artemenkov S.L. Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research. *Modelirovanie i analiz dannykh [Modelling and Data Analysis]*. 2021. 2. C. 31–50. DOI: [10.17759/mda.2021110202](https://doi.org/10.17759/mda.2021110202) (In Russ., abstr. in Engl.)
3. Asmolov A.G. Sistemno-deyatel'nostnyi podkhod k razrabotke standartov novogo pokoleniya [System-activity approach to the development of a new generation of standards]. *Pedagogika [Pedagogy]*, 2009, no. 4, pp. 18–22.
4. Voronina A.V. Problema psihicheskogo zdorov'ya i blagopoluchiya cheloveka: obzor koncepcij i opyt strukturno-urovneвого analiza // *Sibirskij psihologicheskij zhurnal*. 2005. 21. 142–146.
5. Lepeshinskij N.N. Adaptaciya oprosnika «SHkala psihologicheskogo blagopoluchiya» K. Riff // *Psihologicheskij zhurnal (Minsk)*. 2007. 3. 24–37.
6. Mitina L.M., Mitin G.V. Strukturno-soderzhatel'naya model' novej praktiki psihologicheskoy podgotovki pedagogov // *Aktual'nye problemy psihologicheskogo znaniya*. 2023. 1(62). 122–143. DOI: [10.51944/20738544_2023_1_122](https://doi.org/10.51944/20738544_2023_1_122)
7. Ovcharova R.V. Razrabotka pokazatelej i analiza faktorov razvitiya lichnostnogo potenciala i psihologicheskogo blagopoluchiya uchashchihsya v sisteme obshchego obrazovaniya. V kn.: *Psihologicheskoe blagopoluchie lichnosti v sovremennom obrazovatel'nom prostranstve /sost. YU. V. Bratchikova*. Ekaterinburg: URFU. 2013. 11–16.
8. Persiyantseva S.V. Psihologicheskoe blagopoluchie i cennostnye orientacii v strukture lichnostnogo potenciala rossijskoj molodezhi [Psychological well-being and value orientations in the structure of personal potential of Russian youth]. V kn.: *Gercenovskie chteniya: psihologicheskije*



- issledovaniya v obrazovanii / pod red. S.A. Bezgodova. SPb.: RGPU im. A.I. Gercena. 2022. 321–328. DOI: 10.33910/herzenpsyconf-2022-5-41 (In Russ., abstr. in Engl.)
9. Polivanova K.N. New Educational Discourse: The Well-Being of Schoolchildren. Kul'turno-istoricheskaya psikhologiya [Cultural-Historical Psychology], 2020. 16(4), 26–34. DOI: 10.17759/chp.2020160403. (In Russ., abstr. in Engl.)
 10. Shevelenkova T.D., Fesenko P.P. koncepciya psihologicheskogo blagopoluchiya lichnosti i metodika ego issledovaniya. V kn.: Novye teoretiko-metodologicheskie podhody k issledovaniyu v klinicheskoy psihologii / pod red. T. D. Shevelenkovej. M.: Lev". 2013. 9–48.
 11. Antonovsky A. The Sense of Coherence as a Determinant of Health // Behavioral Health: A Handbook of Health Enhancement and Decease Prevention / ed. by J.D. Matarazzo, N. Miller. New York, 1984. 194–202.
 12. Bandura A. Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavior change // Psychological Review. 1977. Vol. 84. 191–215.
 13. Bradburn N.M. The structure of psychological well-being. Chicago: Aldine, 1969. 318 p.
 14. Carver C.S., Scheier M.F. Optimism // Handbook of Positive Psychology / ed. by C.R. Snyder, S.J. Lopez. Oxford University Press, 2002. 221–244.
 15. Diener E., Fujita F. Resources, personal striving, and subjective wellbeing: A nomothetic and ideographic approach // Journal of Personality and Social Psychology. 1995. Vol. 68. 926–935.
 16. Diener E., Wirtz D., Tov W., Kim-Prieto C., Choi D., Oishi S., Biswas-Diener R. New measures of well-being: Flourishing and positive and negative feelings // Social Indicators Research. 2009. Vol. 97 (2). 143–156.
 17. Epskamp S., Fried E.I. A tutorial on regularized partial correlation networks // Psychological Methods. 2018. № 4. 617–634.
 18. Janoff-Bulman R. Assumptive worlds and the stress of traumatic events: Application of the schema construct // Social Cognition. 1989. № 7. 113–136.
 19. Keyes C.L.M., Shmotkin D., Ryff C.D. Optimizing well-being: The empirical encounter of two traditions // Journal of Personality and Social Psychology. 2002. 82(6). 1007–1022.
 20. Maddi S. The Story of Hardiness: 20 Years of Theorizing, Research and Practice // Consulting Psychology Journal. 2001. Vol. 54. 173–185.
 21. McLain D.L., The MSTAT-I: A new measure of an individual's tolerance for ambiguity // Educational and Psychological Measurement. 1993. Vol. 53. 183–189.
 22. Rotter J.B. Some problems and misconceptions related to the construct of internal versus external control of reinforcement // Journal of Consulting and Clinical Psychology. 1975. Vol. 43. 56–67.
 23. Ruff C.D., Singer B. Psychological Well-Being: Meaning, Measurement, and Implications for Psychotherapy Research // Psychotherapy and Psychosomatics. 1996. Vol. 65 (1). 14–23.
 24. Seligman M.E.P. Learned Optimism: How to Change Your Mind and Your Life with a New Preface. New York: A Division of Random House, 2006. 337 p.
 25. Shamionov R.M., Grigoryeva M.V., Grinina E.S., Sozonnik A.V. Characteristics of Academic Adaptation and Subjective Well-Being in University Students with Chronic Diseases // European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education. 2020. № 10. 816–831. DOI: 10.3390/ejihpe10030059

Получена 15.11.2023

Принята в печать 27.11.2023

Received 15.11.2023

Accepted 27.11.2023

Установление сходства текстовых документов

Хорошилов А.А.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4885-3232>
e-mail: khoroshilov@mail.ru

Кан А.В.**

ФГБУ «НИЦ «Институт имени Н.Е. Жуковского»
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: kanav@nrczh.ru

Евдокимова Е.А.***

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской Академии Наук (ИПИ РАН)
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

Пицхелаури С.Г.****

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: sofyauptuns@gmail.com

В настоящей статье рассматривается метод оценки сходства текстов, который основан на анализе сравнения предложений из различных текстов. Преимущества метода состоят в том, что учитывается покрытие предложения-эталона предложением из сравниваемого текста, общая оценка информационной значимости слов предложения-эталона в предложении сравниваемого текста, сходство синтаксических структур предложений, совпадение семантических значений и связей. Применение этого метода проиллюстрировано на примере решения задачи нахождения сходства двух текстов.

Ключевые слова: сходство текстов, сравнение текстов, словоупотребления, естественный язык.

Для цитаты:

Хорошилов А.А., Кан А.В., Евдокимова Е.А., Пицхелаури С.Г. Установление сходства текстовых документов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 45–58. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130403>

***Хорошилов Александр Алексеевич**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российская академия наук (ИПИ РАН), профессор кафедры Московского авиационного института (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4885-3232>, e-mail: khoroughilov@mail.ru

****Кан Анна Владимировна**, кандидат технических наук, доцент МАИ, начальник аналитического отдела ФГБУ «НИЦ «Институт имени Н.Е. Жуковского», г. Москва, Российская Федерация, e-mail: kanav@nrczh.ru

*****Евдокимова Екатерина Андреевна**, математик 1 категории, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российская Академия Наук, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

******Пицхелаури Софья Георгиевна**, студент магистратуры, институт «Информационные технологии и прикладная математика» Московский авиационный институт (национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: sofyaupunts@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ сходства текстов на сегодняшний день является актуальной и значимой проблемой. С развитием цифровых технологий объем текстовой информации становится все больше и продолжает стремительно расти. В связи с этим увеличивается необходимость в инструментах, способных эффективно сравнивать и анализировать тексты в различных контекстах.

Актуальность данной проблемы обусловлена широким спектром ее практических применений. В образовании и научных исследованиях анализ сходства текстов становится незаменимым в выявлении плагиата, обеспечивая тем самым честность и достоверность научных работ. В области информационной безопасности этот вид анализа помогает в борьбе со спамом, фейковыми новостями и проверке подлинности документов. Кроме того, важную роль играет его применение в машинном обучении, анализе социальных медиа и других областях обработки естественного языка (ЕЯ).

2. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ

Методы и способы сравнения текстов могут быть разными. Например, самый простой способ – подсчитать количество общих слов в обоих текстах. В этом методе каждый текст рассматривается как «мешок слов» (bag-of-words), порядок следования слов в предложении игнорируется, учитывается только факт их наличия [1]. Так как этот метод не учитывает порядок слов и не способен уловить семантическую связь между ними, он может привести к сильному завышению показателей сходства. Таким образом, при использовании метода подсчета входящих слов важно также учитывать его ограничения в контексте конкретной задачи.

Метод TF-IDF (Term Frequency-Inverse Document Frequency) [4; 10] используется для оценки важности слова в документе относительно коллекции документов. Он учитывает, насколько слово часто встречается в конкретном документе (чем больше

встречается, тем оно важнее) и уменьшает значимость слова, если оно встречается часто во всех документах коллекции. Этот метод помогает выделять ключевые слова и термины в документе, позволяя лучше понять его содержание и семантику. Минусом метода TF-IDF является недостаточный учет специфики контекста предложений, то есть метод не учитывает контекстуальные зависимости между словами. Он также не улавливает семантическую связь между словами, поскольку основывается на статистике встречаемости слов. И, наконец, метод TF-IDF имеет недостаток в отношении обработки синонимов и слов с похожими значениями, что может снизить точность оценки в некоторых случаях.

Метод векторного сходства [11] представляет собой способ оценки схожести между двумя текстами путем представления каждого текста в виде вектора в многомерном пространстве. Этот метод использует косинусное сходство для определения степени схожести между векторами текстов: чем ближе векторы в многомерном пространстве, тем выше их схожесть. Векторное сходство учитывает семантическую структуру текста, позволяя сравнивать не только конкретные слова, но и их контекст и значение в предложении, что делает его более гибким и точным способом оценки сходства текстов. Недостатки векторного сходства включают ограничения в работе с разреженными данными и большими текстовыми корпусами, поскольку он требует хранения и работы с векторами большой размерности. Также эта методика не всегда улавливает смысловую связь между словами, так как не всегда способна различать семантически близкие, но формально отличающиеся фразы. И, в конечном итоге, векторное сходство может столкнуться с проблемой переобучения при работе с небольшими объемами данных или при неоптимальном подборе параметров модели.

Сравнение текстов с использованием нейронных сетей включает преобразование каждого текста в числовое векторное представление, которое затем подается на вход нейронной сети для вычисления степени их сходства. Эмбединги слов или другие методы преобразования текста в числовые векторы позволяют учесть семантическую близость слов и контекст текста. Нейронная сеть может использовать различные архитектуры такие как: Siamese нейронные сети или архитектуры с использованием сверточных и рекуррентных слоев [6]. Обученная нейронная сеть затем может использоваться для сравнения новых текстов – предсказывать их сходство или различие на основе прошлых вычислений. При правильной настройке и обучении нейронные сети способны улавливать сложные зависимости между текстами, учитывая семантическую и контекстуальную информацию, что делает их мощным инструментом для сравнения текстовых данных. К недостаткам нейронных сетей можно отнести то, что они требуют большого объема данных для обучения, собирать которые может быть сложно и затратно. Также использование нейронных сетей для сравнения текстов требует значительных вычислительных ресурсов. Нейронные сети могут быть чувствительны к шуму или неправильной разметке данных.

Также следует рассмотреть модель фразеологического концептуального анализа текстов на естественном языке [7; 8]. Данная модель предназначена для выявления

фразеологических единиц и анализа их концептуальной структуры в текстах. Она использует методы лингвистического анализа и компьютерной обработки текстов для идентификации и интерпретации фразеологизмов и их семантических связей. Модель фразеологического концептуального анализа текстов может быть использована для установления сходства текстовых документов путем анализа фразеологических единиц, их концептуальных связей и использования семантических моделей для определения степени сходства между текстами на основе общих фразеологических концептов. Таким образом, фразеологический анализ может быть важным инструментом для улучшения процессов сравнения и классификации текстовых документов на основе их семантического содержания.

В настоящей статье предлагается метод сходства текстов, основанный на сравнении предложений эталонного текста и сравниваемого с ним. Преимущество данного метода заключается в том, что он учитывает различные аспекты, такие как покрытие предложения-эталона предложением из сравниваемого текста, общую информационную значимость слов предложения-эталона в предложении сравниваемого текста, сходство синтаксических структур предложений, совпадение семантических значений и связей для оценки их сходства.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем использовать следующие определения.

- Лемма – начальная, словарная форма слова. В русском языке для существительных и прилагательных это форма именительного падежа единственного числа, для глаголов и глагольных форм – форма инфинитива.
- Лексема – совокупность всех значений и грамматических форм слова. Например, словарь, словарем, словарю – это формы одной и той же лексемы, по соглашению пишущейся как «словарь».
- Словоупотребление – элемент множества контекстов, в которых может использоваться рассматриваемое слово.
- Словоформа – форма слова, которая формируется в конкретном контекстном окружении.
- Синтаксема – минимальная синтаксическая единица. Синтаксемам приписываются семантические значения, а сами синтаксеммы связываются с другими синтаксемами семантическими отношениями [5].

Пусть имеется два текста c и a . Приведем представление текстовой информации. Пусть D – некоторое универсальное множество лемм, B – множество словоформ всех лексем ЕЯ, $A = \{a\}$ – множество текстов (где a – произвольный текст). Текст содержит конечное множество словоупотреблений $R^a = \{r_i\}$ и конечное множество меток $F = \{f_i\}$. SR – множество видов синтаксических связей. Определим разбиение множества словоупотреблений на предложения – множество $S^a = \{s_i\}$, $S^a \subset 2^{R^a}$, где 2^{R^a} – булеан множества R^a . Пусть $v(r^a)$ – числовая функция, определяющая вес словоупотребления в тексте. Roles – конечное множество категориально-

семантических значений синтаксем. δ^a – бинарное отношение на множестве словоупотреблений R^a и D , которое ставит каждому словоупотреблению в соответствие его нормальную форму: $\forall r \in R^a \exists d \in D : \langle r, d \rangle \in \delta^a$. Допускается, что одно словоупотребление можно нормализовать разными способами и, соответственно, получать разные нормальные формы для одного и того же словоупотребления. ψ^a – бинарное отношение на множестве R^a и множестве B . Каждое словоупотребление имеет единственную форму ($\forall r \in R^a \exists g \in B : \langle r, g \rangle \in \psi^a$) & ($\exists g' \in B : \langle r, g' \rangle \in \psi^a$) $\rightarrow g = g'$, т.е. отношение ψ^a функционально по определению. θ^a – бинарное отношение, соотносящее словоупотреблению определенную метку (например, гипертекстовой разметки). Каждому словоупотреблению соответствует единственная метка: ($\forall r \in R^a \exists f \in F : \langle r, f \rangle \in \theta^a$) & ($\exists f' \in F : \langle r, f' \rangle \in \theta^a$) $\rightarrow f = f'$, т.е. отношение θ^a функционально по определению. $\Sigma^a \subseteq R^a \times R^a$ – бинарное отношение, которое определяет всевозможные синтаксические связи между словоупотреблениями, согласно работе [2]. Так как в этой работе синтаксические структуры рассматриваются в виде деревьев, введенное определение корректно. Будем считать, что в паре r_i, r_j первый элемент – $r_i \in R^a$ – соответствует главному словоупотреблению (ГС), а второй элемент – $r_j \in R^a$ – зависимому (подчиненному) словоупотреблению. $\Omega^a \subseteq R^a \times R^a$ – бинарное отношение, представляющее семантически связанные словоупотребления в тексте. $SemRoles^a$ – бинарное отношение, которое ставит в соответствие словоупотреблениям текста семантические значения синтаксем. Таким образом, каждое словоупотребление может иметь 0 и более семантических значений в тексте.

Требуется разработать метод оценки сходства текстов. В результате работы метода требуется получить числовое значение от нуля до единицы, которое будет отражать сходство текстов.

4. МЕТОД ОЦЕНКИ СХОДСТВА ТЕКСТОВ

Пусть имеется текст-эталон $\varepsilon \in A$ и сравниваемый с ним текст $\tau \in A$. Чтобы получить оценку сходства текстов, будем сравнивать их по множествам предложений S^ε ($s^\varepsilon \in S^\varepsilon$) и S^τ ($s^\tau \in S^\tau$). Если тексты имеют длину менее 3 предложений, то не имеет смысла сравнивать их по предложениям, можно сравнить их целиком.

Для сопоставления предложений будем использовать множество $N(s^\varepsilon, s^\tau) = \{ \langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in R^\varepsilon \times R^\tau \mid r^\varepsilon \in s^\varepsilon, \exists r^\tau \in s^\tau, \exists d \in D : \langle r^\varepsilon, d \rangle \in \delta^\varepsilon \ \& \ \langle r^\tau, d \rangle \in \delta^\tau \}$ пар словоупотреблений, которые будем называть соответственными.

Для оценки сходства предложений s^ε и s^τ будем использовать нижеописанные критерии.

1. Для расчета покрытия предложения-эталона предложением сопоставляемого текста введем формулу:

$$I_1(s^\varepsilon, s^\tau) = \sum_{\langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau)} v(r^\varepsilon).$$



Как функция определения весов $v(r^\varepsilon)$ может применяться TF-IDF [4; 10] или характеристика тематической значимости [11].

Введем ограничение:

$$\sum_{r^\varepsilon \in R^\varepsilon} v(r^\varepsilon) = 1. \quad (1)$$

2. Для определения общей оценки информационной значимости слов предложения-эталона в предложении сравниваемого текста используется формула:

$$I_2(s^\varepsilon, s^\tau) = \sum_{\langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau)} f(r^\varepsilon, r^\tau) v(r^\varepsilon) v'(r^\tau).$$

Здесь $f(r^\varepsilon, r^\tau)$ – это «штраф» за несовпадение форм словоупотреблений r^ε, r^τ :

$$f(r^\varepsilon, r^\tau) = \begin{cases} 1, \exists g \in B: \langle r^\varepsilon, g \rangle \in \psi^\varepsilon \text{ and } \langle r^\tau, g \rangle \in \psi^\tau, \\ f_0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $0 \leq f_0 \leq 1$ – параметр метода. Как функцию определения весов $v'(r^\tau)$ можно выбрать классическую оценку term frequency (TF) [4; 10]. Дополнительное условие на $v'(r^\tau)$, следующее из ограничения (1) можно записать следующим образом: $0 \leq v'(r^\tau) \leq 1$.

Предположим, что текст синтаксически связный. Тогда имеет смысл рассматривать следующие критерии:

3. Для оценки сходства предложения-эталона и предложения сравниваемого текста на основе совпадения синтаксических структур введем формулу:

$$I_3(s^\varepsilon, s^\tau) = \frac{\sum_{\langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N_{Syn}(s^\varepsilon, s^\tau)} v(r^\varepsilon)}{\sum_{r^\varepsilon \in \{r \in R^\varepsilon | \exists r' \in R^\varepsilon: \langle r, r' \rangle \in \Sigma^\varepsilon\}} v(r^\varepsilon)},$$

где $N_{Syn}(s^\varepsilon, s^\tau) = \{\langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau) | \exists \tilde{r}^\varepsilon \in R^\varepsilon, \exists \tilde{r}^\tau \in R^\tau, \exists z \in SR: \langle \tilde{r}^\varepsilon, \tilde{r}^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau) \& \langle r^\varepsilon, \tilde{r}^\varepsilon \rangle \in \Sigma_z^\varepsilon \& \langle r^\tau, \tilde{r}^\tau \rangle \in \Sigma_z^\tau\}$ представляет собой множество пар соответственных словоупотреблений в эталонном предложении s^ε и сопоставляемом предложении s^τ , для которых совпадают (по нормальным формам лексем) главные $\langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau)$ и зависимые $\langle \tilde{r}^\varepsilon, \tilde{r}^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau)$ слова, а сами словоупотребления связаны в контексте эталонного и сопоставляемого предложения однотипными синтаксическими связями: $\langle r^\varepsilon, \tilde{r}^\varepsilon \rangle \in \Sigma_z^\varepsilon \& \langle r^\tau, \tilde{r}^\tau \rangle \in \Sigma_z^\tau$. Знаменатель формулы – это совокупный вес словоупотреблений, которые являются главными элементами в синтаксически связанных парах словоупотреблений в эталонном тексте.

4. Выделим группу слов с семантическими значениями в предложении эталона, для которых в сопоставляемом тексте существуют соответствующие слова с теми же семантическими значениями:

$$\rho(s^\varepsilon, s^\tau) = \{ \langle r^\varepsilon, a \rangle \in SemRoles^\varepsilon \mid r^\varepsilon \in s^\varepsilon \& a \in Roles \& \exists r^\tau \in s^\tau: \langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau) \& \langle r^\tau, a \rangle \in SemRoles^\tau \},$$

Тогда сходство предложения-эталона s^ε и предложения s^τ сопоставляемого текста на основе совпадения семантических значений определяется формулой:

$$I_4(s^\varepsilon, s^\tau) = \frac{|\rho(s^\varepsilon, s^\tau)|}{|WR^\varepsilon|},$$

где WR^ε – множество всех словоупотреблений, имеющих семантические значения.

Числитель в формуле выражает количество совпавших семантических значений у словоупотреблений в предложении эталона и в предложении сопоставляемого текста. Знаменатель формулы задает условие нормировки на 1 по всем словоупотреблениям, имеющим семантические значения в тексте эталона: $0 \leq I_4(s^\varepsilon, s^\tau) \leq 1$.

5. Для оценки сходства предложений на основе совпадения семантических связей введем множество $SemR_r^\varepsilon = \{a \in Roles \mid \exists r' \in R^\tau, \exists x \in \mathbb{R}: \langle r, r' \rangle \in \Omega_x^\tau \& \langle r', a \rangle \in \Omega_x^\tau \& \langle r', a \rangle \in SemRoles^\tau\}$ значений синтаксис, которые связаны в тексте с различными семантическими связями. На основе этих связей и определяется сходство между s^ε и s^τ .

$$I_5(s^\varepsilon, s^\tau) = \frac{\sum_{\langle r^\varepsilon, r^\tau \rangle \in N(s^\varepsilon, s^\tau)} |SemR_{r^\varepsilon}^\varepsilon \cap SemR_{r^\tau}^\tau|}{|WR^\varepsilon|}.$$

Общая оценка сходства предложения эталона и сравниваемого предложения определяется суммой критериев, учитывая их взвешенное значение.

$$Sim(s^\varepsilon, s^\tau) = \sum_{n=1}^5 \alpha_n I_n(s^\varepsilon, s^\tau), \sum_{n=1}^5 \alpha_n = 1.$$

Из всех предложений в сравниваемом тексте выбираются наиболее подходящие к предложению-эталону с учетом максимизации оценки:

$$J(s^\varepsilon, \tau) = \max_{s^\tau \in S^\tau} \{ Sim(s^\varepsilon, s^\tau) \}.$$

Учитывая все вышеперечисленные величины, определим общую оценку сходства текста-эталона и сравниваемого текста:

$$I(\varepsilon, \tau) = \sum_{s^\tau \in S^\tau} J(s^\varepsilon, \tau). \quad (2)$$

5. ПРИМЕР

Рассмотрим два текста, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Текст-эталон и сравниваемый текст

Текст-эталон	Сравниваемый текст
Совет директоров Центробанка РФ 27 октября принял решение поднять ключевую ставку сразу на 200 базисных пунктов – с 13 до 15 % годовых, говорится в сообщении на сайте регулятора. Это четвертое подряд повышение уровня показателя.	Совет директоров Банка России поднял ключевую ставку сразу на 200 б.п. – до 15 % годовых, говорится в сообщении регулятора. Это четвертое подряд повышение – к ужесточению политики ЦБ перешел в июле 2023 года и один раз даже повышал ставку на внеплановом заседании.
<i>Известия, Экономика, 27 октября 2023, 13:31</i>	<i>РБК, Финансы, 27 октября 2023, 13:30</i>

Для наглядного примера взяты небольшие тексты, поэтому не имеет смысла сравнивать их по предложениям, сравним их целиком. Тогда метод завершится на этапе подсчета взвешенной суммы всех критериев.

В качестве функции определения весов $v(r^\varepsilon)$ будем применять TF-IDF, которая рассчитывается следующим образом:

$$TF(\varepsilon, \tau) = \frac{n_\varepsilon}{\sum_\tau n_\tau},$$

где n_ε – число вхождений наименования понятия t в документ; $\sum_\tau n_\tau$ – общее число наименований понятий в данном документе.

$$IDF(\varepsilon, D) = \log \frac{|D|}{|\{d_i \in D \mid \varepsilon \in d_i\}|},$$

где $|D|$ – число документов в коллекции (в нашем случае 20); $|\{d_i \in D \mid \varepsilon \in d_i\}|$ – число документов из коллекции D , в которых встречается ε (когда $n_\varepsilon \neq 0$).

Мера TF-IDF является произведением двух сомножителей:

$$TF-IDF(\varepsilon, \tau, D) = TF(\varepsilon, \tau) \times IDF(\varepsilon, D)$$

Рассчитаем покрытие предложения-эталона предложением сопоставляемого текста. В табл. 2 показан расчет TF-IDF первых 10 слов документа.

Таблица 2

Расчет TF-IDF

	встречаемость в документах	IDF	количество повторений слова в тексте-эталоне	TF текста- эталона	TF-IDF
совет	10	0,30103	1	0,03030	0,00912
директоров	10	0,30103	1	0,03030	0,00912
Центробанка	11	0,25964	1	0,03030	0,00787
РФ	6	0,52288	1	0,03030	0,01585
27	5	0,60206	1	0,03030	0,01824
октября	7	0,45593	1	0,03030	0,01382
принял	11	0,25964	1	0,03030	0,00787
решение	12	0,22185	1	0,03030	0,00672
поднять	12	0,22185	1	0,03030	0,00672
ключевую	13	0,18709	1	0,03030	0,00567
...					

Тогда величина первого критерия

$$I_1(s^e, s^r) = \sum_{\langle r^e, r^r \rangle \in N(s^e, s^r)} v(r^e) = 0,234.$$

Рассчитаем общую оценку информационной значимости слов предложения-эталона в предложении сравниваемого текста. Параметр метода f_0 положим равным 0.5. Как функцию определения весов $v'(r^r)$ выберем TF, рассчитанную по формуле (3). В табл. 3 показаны результаты расчета оценки информационной значимости первых 10 слов документа.

Таблица 3

Расчет оценки информационной значимости слов

	TF-IDF	TF сравниваемого текста	оценка информационной значимости слов
совет	0,00912	0,025	0,000114027
директоров	0,00912	0,025	0,000114027
Центробанка	0,00787	0	0
РФ	0,01585	0	0
27	0,01824	0	0
октября	0,01382	0	0
принял	0,00787	0	0
решение	0,00672	0	0
поднять	0,00672	0,025	0,000084034
ключевую	0,00567	0,025	0,000070866
...			

Получим, что значение второго критерия равняется

$$I_2(s^e, s^r) = \sum_{\langle r^e, r^r \rangle \in N(s^e, s^r)} f(r^e, r^r) v(r^e) v'(r^r) = 0,002.$$

Для подсчета $I_3(s^e, s^r)$ выделим синтаксические структуры текстов. Цветом покажем главные слова: желтым – совпадающие в двух текстах, зеленым – все остальные (табл. 4).

Таблица 4

Выделение синтаксических структур текстов

Совет директоров Центробанка РФ 27 октября принял решение поднять ключевую ставку сразу на 200 базисных пунктов – с 13 до 15 % годовых, говорится в сообщении на сайте регулятора. Это четвертое подряд повышение уровня показателя.	Совет директоров Банка России поднял ключевую ставку сразу на 200 б.п. – до 15 % годовых, говорится в сообщении регулятора. Это четвертое подряд повышение – к ужесточению политики ЦБ перешел в июле 2023 года и один раз даже повышал ставку на внеплановом заседании.
---	--

Тогда значение третьего критерия будет равно

$$I_3(s^e, s^r) = \frac{\sum_{\langle r^e, r^r \rangle \in N_{Syn}(s^e, s^r)} v(r^e)}{\sum_{r^e \in \{r \in R^e | \exists r' \in R^e: \langle r, r' \rangle \in \Sigma^e\}} v(r^e)} = \frac{0,034}{0,096} = 0,354.$$

Посчитаем сходство текста-эталона и сравниваемого текста на основе совпадения семантических значений предложений:

$$I_4(s^e, s^r) = \frac{|\rho(s^e, s^r)|}{|WR^e|} = \frac{18}{28} = 0,643.$$

Проведем оценку сходства текстов на основе совпадения семантических связей в их предложениях:

$$I_5(s^e, s^r) = \frac{\sum_{\langle r^e, r^r \rangle \in N(s^e, s^r)} |SemR_{r^e}^e \cap SemR_{r^r}^r|}{|WR^e|} = \frac{15}{28} = 0,536.$$

Для параметров метода α_n , где $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ выберем следующие значения $\alpha_1 = 0,2$; $\alpha_2 = 0,05$; $\alpha_3 = 0,1$; $\alpha_4 = 0,4$; $\alpha_5 = 0,25$. Тогда общая оценка сходства текстов будет равна:

$$Sim(\varepsilon, \tau) = 0,234 \cdot 0,2 + 0,002 \cdot 0,05 + 0,354 \cdot 0,1 + 0,643 \cdot 0,4 + 0,536 \cdot 0,25 = 0,474.$$

Так как сравниваемые тексты содержат не более 3 предложений, то показатель (2) не рассчитывается.

Значит, тексты сходятся с $Sim(\varepsilon, \tau) = 0,474$. То есть сравниваемый текст повторяет эталонный примерно в половину.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье представлен метод оценки схожести текстов, который определяет соответствие между текстами на основе сравнения предложений. Для определения близости текстов используются различные критерии, такие как: покрытие предложения из эталонного текста предложением из сравниваемого текста, оценка информационной значимости слов, сравнение синтаксических структур, семантических значений и семантических связей. Общая оценка схожести предложений определяется с использованием взвешенной суммы этих критериев, вклад в каждый из которых вносят параметры метода.

Литература

1. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и анализ данных: учеб. пособие / Большакова Е.И., Воронцов К.В., Ефремова Н.Э., Клышинский Э.С., Лукашевич Н.В., Сапин А.С. – М.: Изд-во НИУ ВШЭ, 2017. – 269 с.
2. Сокирко А.Ю. Семантические словари в автоматической обработке текста (по материалам системы ДИАЛИНГ) / Дисс канд.т.н. // [Электронный ресурс] URL: <http://www.aot.ru/docs/sokirko/sokirko-candid-1.html> (дата обращения 23.10.2023)
3. Соченков И.В. Метод сравнения текстов для решения поисково-аналитических задач // Искусственный интеллект и принятие решений. М.: ИСА РАН, 2013, №2, с.95–106.
4. Маннинг К., Рагхаван П., Шютце Х. Введение в информационный поиск. – Вильямс, 2011. – ISBN 978-5-8459-1623-5
5. Осипов Г.С., Тихомиров И.А., Смирнов И.В. «Семантический поиск в сети интернет средствами поисковой машины Eхастус» // Труды одиннадцатой национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2008. – Т. 3. – М.: ЛЕНАНД, 2008. – С. 323–328
6. Пекунов В.В. Извлечение информации из нейронных сетей прямого распространения в виде простых алгебраических моделей // Информационные технологии. 17. Т. 23. № 1. С. 76
7. Хорошилов Ал-др А., Кан А.В., Ковернинский И.В., Ревина В.Д., Хорошилов А.А. Автоматическое извлечение фактографической информации из научно-технических текстов авиационной отрасли // сб. «Информационные и телекоммуникационные технологии», № 43, 2019, стр. 71–78.
8. Хорошилов Ал-др А., Мусабаев Р.Р., Козловская Я.Д., Никитин Ю.В., Хорошилов Алей А. Автоматическое выявление и классификация информационных событий в текстах СМИ // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. ВИНТИ РАН. 2020. №7. С. 27–38. ISSN: 0548-0027. DOI: 10.36535/0548-0027-2020-07-4.
9. Мбайкоджи Э., Драль А.А., Соченков И.В. Метод автоматической классификации коротких текстовых сообщений // Информационные технологии и вычислительные системы. М.: ИСА РАН №3, 2012. С. 93–102.

10. *Christopher Manning, Prabhakar Raghavan, and Hinrich Schütze*. Introduction to Information Retrieval. Cambridge University Press, 2008
11. *Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods*. Digital Image Processing, Prentice Hall. – 2002. – 793 p.
12. *Zipf, G.K.* Selected studies of the principle of relative frequencies of language / Cambridge, Massachusetts: Harvard Unive, 1932.



Establishing Similarities between Text Documents

Alexander A. Khoroshilov*

Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4885-3232>
e-mail: khoroshilov@mail.ru

Anna V. Kan**

FSBI «National Research Center» Institute
named after N.E. Zhukovsky, Moscow, Russia
e-mail: kanav@nrczh.ru

Ekaterina A. Evdokimova ***

Federal Research Center “Informatics and Management”
of the Russian Academy of Sciences (IPI RAS), Moscow, Russia
e-mail: evdokimovaekan@mail.ru

Sofya G. Pitskhelauri ****

Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russian
e-mail: sofyauptuns@gmail.com

This article discusses a method for assessing the similarity of texts, which is based on the analysis of comparison of sentences from different texts. The advantages of the method are that it takes into account the coverage of the standard sentence by a sentence from the compared text, the general assessment of the informational significance of the words of the standard sentence in the sentence of the compared text, the similarity of the syntactic structures of sentences, the coincidence of semantic meanings and connections. The application of this method is illustrated by the example of solving the problem of finding the similarities between two texts.

Keywords: similarity of texts, comparison of texts, word usage, natural language.

For citation:

Khoroshilov A.A., Kan A.V., Evdokimova E.A., Pitskhelauri S.G. Establishing Similarity between Text Documents. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 45–58. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130403> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Alexander A. Khoroshilov**, Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, Federal Research Center “Informatics and Management” Russian Academy of Sciences (IPI RAS), Professor, Department of the Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4885-3232>, e-mail: khoroshilov@mail.ru

****Anna V. Kan**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Head of the Analytical Department, Federal State Budgetary Institution «National Research Center» Institute named after N.E. Zhukovsky, e-mail: kanav@nrczh.ru



*****Ekaterina A. Evdokimova**, 1st Category Mathematician, Federal Research Center «Informatics and Management» Russian Academy of Sciences (IPI RAS), Moscow, Russia, e-mail: evdokimovaeakan@mail.ru

******Sofya G. Pitshhelauri**, Master's Student at the Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, e-mail: sofyaupunts@gmail.com

References

1. Avtomaticheskaya obrabotka tekstov na estestvennom yazyke i analiz dannykh: ucheb. posobie [Automatic natural language text processing and data analysis: tutorial] / Bol'shakova E.I., Vorontsov K.V., Efremova N.E., Klyshinskii E.S., Lukashevich N.V., Sapin A.S. – M.: Izd-vo NIU VShE, 2017. – 269 p.
2. A.Yu. Sokirko. Semanticheskie slovari v avtomaticheskoi obrabotke teksta (po materialam sistemy DIALING) [Semantic dictionaries in automatic text processing (based on the materials of the DARLING system)] / Diss kand.t.n. // [Elektronnyi resurs] URL: <http://www.aot.ru/docs/sokirko/sokirko-candid-1.html> (date of application 23.10.2023)
3. I.V. Sochenkov. Metod sravneniya tekstov dlya resheniya poiskovo- analiticheskikh zadach // Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii [Text comparison method for solving search and analytical problems // Artificial intelligence and decision making]. M.: ISA RAN, 2013, No2, p. 95–106.
4. Manning K., Raghavan P., Shyuttse Kh. Vvedenie v informatsionnyi poisk. – Vil'yams [Introduction to information retrieval. – Williams], 2011. – ISBN 978-5-8459-1623-5
5. Osipov G.S., Tikhomirov I.A., Smirnov I.V. «Semanticheskiĭ poisk v seti internet sredstvami poiskovoĭ mashiny Exactus» [Semantic search on the Internet using the Exactus search engine]. Trudy odinnadtsatoi natsional'noi konferentsii po iskusstvennomu intellektu s mezhdunarodnym uchastiem KII-2008. – T. 3. – M.: LENAND, 2008. – S. 323–328
6. Pekunov V.V. Izvlechenie informatsii iz neironnykh setei pryamogo rasprostraneniya v vide prostykh algebraicheskikh modelei // Informatsionnye tekhnologii. 17. T. 23. № 1. S. 76
7. Khoroshilov Al-dr A., Kan A.V. Koverninskii I.V., Revina V.D., Khoroshilov A.A. Avtomaticheskoe izvlechenie faktograficheskoi informatsii iz nauchno-tekhnicheskikh tekstov aviatsionnoi otrasli // sb. «Informatsionnye i telekommunikatsionnye tekhnologii» [Automatic extraction of factual information from scientific and technical texts of the aviation industry // Sat. "Information and telecommunication technologies"], № 43, 2019, str. 71–78.
8. Khoroshilov Al-dr A., Musabaev R.R., Kozlovskaya Ya.D., Nikitin Yu.V., Khoroshilov Al-ei A. Avtomaticheskoe vyyavlenie i klassifikatsiya informatsionnykh sobytii v tekstakh SMI // Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya [Automatic detection and classification of information events in media texts // Scientific and technical information]. Seriya 2: Informatsionnye protsessy i sistemy. VINITI RAN. 2020. №7. S. 27–38. ISSN: 0548-0027. DOI: 10.36535/0548-0027-2020-07-4.
9. Mbaikodzhi E., Dral' A.A., Sochenkov I.V. Metod avtomaticheskoi klassifikatsii korotkikh tekstovykh soobshchenii // Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy [Method for automatic classification of short text messages // Information technologies and computing systems.]. M.: ISA RAN No3, 2012. S. 93-102.
10. Christopher Manning, Prabhakar Raghavan, and Hinrich Schutze. Introduction to Information Retrieval. Cambridge University Press, 2008
11. Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. Digital Image Processing, Prentice Hall. – 2002. – 793 p.
12. Zipf, G.K. Selected studies of the principle of relative frequencies of language / Cambridge, Massachusetts: Harvard Unive, 1932.

Получена 20.11.2023

Received 20.11.2023

Принята в печать 06.12.2023

Accepted 06.12.2023

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.862.6

Сравнительный анализ эффективности методов построения вполне интерпретируемых линейных регрессионных моделей

Базилевский М.П.*

Иркутский государственный университет путей сообщения
(ФГБОУ ВО ИРГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>
e-mail: mik2178@yandex.ru

Ранее автору удалось свести задачу построения вполне интерпретируемой линейной регрессии, оцениваемой с помощью метода наименьших квадратов, к задаче частично-булевого линейного программирования. В таких моделях знаки оценок соответствуют содержательному смыслу факторов, абсолютные вклады переменных в общую детерминацию существенны, а степень мультиколлинеарности мала. Оптимальное решение сформулированной задачи также может быть найдено методом полного перебора регрессий. Цель статьи заключается в проведении сравнительного анализа эффективности этих двух подходов. Для проведения вычислительных экспериментов использовано 5 наборов реальных статистических данных различных объемов. В результате с помощью пакета LPSolve в разных условиях было решено более 550 различных частично-булевых задач. Параллельно оценена эффективность решения подобных им задач методом полного перебора в пакете Gretl. Во всех экспериментах предложенный нами метод оказался многократно эффективнее метода полного перебора. Самая высокая эффективность была достигнута при решении задач выбора оптимального числа регрессоров из 103 переменных, для решения каждой из которых методом перебора потребовалось бы оценить примерно 2103 (10,1 нониллиона) моделей, с чем обычный компьютер не справился бы и за 1000 лет. В LPSolve каждая из этих задач была решена за 32–191 секунду. Предложенным методом за приемлемое время удалось обработать выборку данных большого объема, содержащую 40 объясняющих переменных и 515345 наблюдений, что подтверждает независимость его эффективности от объема выборки. Выявлено, что ужесточение в линейных ограничениях задачи требований на мультиколлинеарность и абсолютные вклады переменных практически всегда снижает скорость её решения.



Ключевые слова: линейная регрессия, метод наименьших квадратов, интерпретируемость, задача частично-булевого линейного программирования, метод полного перебора, вклады переменных в детерминацию, мультиколлинеарность, эффективность.

Для цитаты:

Базилевский М.П. Сравнительный анализ эффективности методов построения вполне интерпретируемых линейных регрессионных моделей // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 59–83. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130404>

***Базилевский Михаил Павлович**, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИРГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс построения линейной регрессионной модели условно можно разделить на два этапа: 1) выбор структурной спецификации; 2) оценивание неизвестных параметров регрессии. Выбор структурной спецификации, т.е. математической формы связи между переменными, в линейной модели означает решение задачи отбора m наиболее информативных регрессоров (ОИР) [1,2] из общего их числа l на основе некоторого оптимизационного критерия. Точным методом, гарантирующим оптимальное решение задачи ОИР, считается метод полного перебора [1], алгоритм которого предполагает оценивание C_l^m моделей-претендентов. Например, если $l = 50$, $m = 10$, то потребуется оценить 10272278170 моделей. Таким образом, метод полного перебора и самый трудоёмкий из всех методов решения задач ОИР. Если же число отбираемых регрессоров неизвестно, то трудоёмкость метода становится ещё больше, поскольку своей оценки при достаточном объеме выборки n требуют уже $2^l - 1$ моделей. Самым простым методом оценивания линейных регрессий является метод наименьших квадратов (МНК), в рамках которого разработано множество различных статистических тестов.

Для решения задач ОИР в линейных регрессиях (см., например, [3–11]) в настоящее время успешно применяется аппарат математического программирования, что гораздо эффективнее, чем использование переборных процедур. При этом также гарантируется оптимальность построенной модели. В зарубежной литературе задачи ОИР при использовании МНК принято в основном формулировать в виде задач частично-булевого квадратичного программирования (ЧБКП) [3], скорость решения которых зависит от объема выборки n . Результаты анализа научных статей по данной тематике представлены в табл. 1, во втором столбце которой приводятся фамилии учёных и год исследования; в третьем – краткая характеристика решаемой задачи ОИР; в четвёртом – максимальный объем выборки n_{\max} и максимальное число объясняющих переменных l_{\max} , обработанных в результате исследования; в пятом – название решателя задачи математического программирования; в шестом – информация о системе, в которой проводились вычислительные эксперименты.

Таблица 1

Результаты анализа научных статей

№	Авторы (год)	Особенность задачи	(n_{\max}, l_{\max})	Решатель	Оборудование
1	Конно, Ямамото (2009) [3]	ЧБКП, отбор m регрессоров, эвристический алгоритм	(1000, 70)	CPLEX 10.1	Xeon, 3.73 GHz
2	Мияширо, Така-но (2015) [4]	ЧБКП, отбор регрессоров по критериям AIC, BIC и скорректированному коэффициенту детерминации	(1933, 100)	CPLEX	Xeon
3	Мияширо, Така-но (2015) [5]	ЧБКП, отбор регрессоров по критерию Меллоуза	(1993, 100)	CPLEX 12.5	Intel Xeon W5590, 3.33 GHz×2, 24 GB RAM
4	Парк, Клабжан (2020) [6]	ЧБКП, отбор регрессоров по разным критериям MAE, MSE и mRMR (минимальной избыточности и максимальной релевантности), итерационный эвристический алгоритм	(506, 103)	CPLEX	Xeon, 2.8 GHz, 15 GB RAM
5	Тамура и др. (2019) [7]	ЧБКП, отбор регрессоров с контролем мультиколлинеарности по критерию VIF	(1993, 100)	CPLEX	Intel Core i7-4770, 3.40 GHz, 8 GB RAM
6	Тамура и др. (2017) [8]	Полуопределенная ЧБКП, отбор регрессоров с контролем мультиколлинеарности по числу обусловленности корреляционной матрицы	(1066, 65)	Gurobi 5.6, SCIP-SDP-2.0.0	Intel Core2 Quad, 2.66 GHz, 4 GB RAM
7	Бертсимаc, Ли (2020) [9]	ЧБКП, отбор значимых регрессоров с контролем мультиколлинеарности, holistic regression	(9358, 125)	Gurobi 8.0	i7-5820k 6-core CPU, 16 GB DRAM
8	Чанг, Парк, Чонг (2020) [10]	ЧБКП, regression diagnostics	(1599, 124)	Gurobi 9.0	Intel Core i7-8700 CPU, 3.40 GHz (8 CPUs), 32 GB RAM
9	Такано, Мияширо (2020) [11]	ЧБКП, отбор регрессоров в ридж-регрессии с помощью критерия кросс-валидации	(100, 25)	CPLEX 12.8	Intel Core i7-4790 MCU, 3.60 GHz, 16 GB

По табл. 1 видно, что на сегодняшний день существует множество формулировок задач ОИР в терминах ЧБКП, позволяющих контролировать в процессе решения самые разные характеристики линейных регрессий – качество аппроксимации, мультиколлинеарность, значимость коэффициентов и пр. Также видно, что исследо-

ватели избегают решения задач большой размерности, когда объемы выборок более 10000 наблюдений, а число объясняющих переменных более 150 штук. При этом вычислительные эксперименты практически всегда проводятся с использованием дорогостоящих пакетов CPLEX и Gurobi на довольно мощных компьютерах.

В [12] автору удалось свести задачу ОИР в линейной регрессии, оцениваемой с помощью МНК, к задаче частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП). Целевой функцией в ней выступает коэффициент детерминации, а количество линейных ограничений, в отличие от формулировок [3–11], не зависит от объема выборки n . В дальнейшем формализованная задача дополнилась ограничениями на коэффициенты вздутия дисперсии VIF [13], на t -критерии Стьюдента [14] и пр. На данный момент в [15] приведена самая последняя формулировка задачи ЧБЛП, решение которой приводит к построению вполне интерпретируемой линейной регрессии с оптимальным по коэффициенту детерминации количеством регрессоров, в которой знаки МНК-оценок согласованы со знаками соответствующих коэффициентов корреляции с y , абсолютные вклады переменных в общую детерминацию не меньше заданного числа θ , а величины интеркорреляций по модулю не больше заданного числа r . Тестирование сформулированной в [15] задачи на реальных выборках большого объема никогда ещё не проводилось.

Цель работы заключается в проведении на основе реальных данных различных объемов сравнительного анализа эффективности решения задачи построения вполне интерпретируемых линейных регрессий методом полного перебора и методом решения специальным образом сформулированной задачи ЧБЛП.

2. ЗАДАЧА ЧБЛП И ПРОГРАММА ДЛЯ ЕЁ АВТОМАТИЧЕСКОГО ФОРМИРОВАНИЯ

Пусть в распоряжении исследователя имеется выборка данных объема n для зависимой (объясняемой) переменной y и l независимых (объясняющих) переменных x_1, x_2, \dots, x_l . Составим матрицу коэффициентов интеркорреляций

$$R_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_l} \\ r_{x_1x_2} & 1 & \dots & r_{x_2x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_1x_l} & r_{x_2x_l} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

и вектор $R_{yx} = (r_{yx_1} \ r_{yx_2} \ \dots \ r_{yx_l})^T$ корреляций объясняющих переменных с y .

Сформулируем задачу ЧБЛП для ОИР в линейной регрессии так, как это сделано в [15]:

$$R^2 = \sum_{j=1}^l r_{yx_j} \cdot \beta_j \rightarrow \max \tag{1}$$

$$-(1-\delta_j) \cdot M \leq \sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \cdot \beta_k - r_{yx_j} \leq (1-\delta_j) \cdot M, \quad j = \overline{1, l}, \quad (2)$$

$$0 \leq \beta_j \leq \delta_j \cdot M, \quad j \in J^+, \quad (3)$$

$$-\delta_j \cdot M \leq \beta_j \leq 0, \quad j \in J^-, \quad (4)$$

$$\delta_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (5)$$

$$C_{x_j}^{abc} = r_{yx_j} \cdot \beta_j \geq \theta \cdot \delta_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (6)$$

$$\left| r_{x_i x_j} \right| \left(\delta_i + \delta_j - 1 \right) \leq r, \quad (i, j) \in \left\{ (s_1, s_2) : \left| r_{x_{s_1} x_{s_2}} \right| \geq r \right\}, \quad (7)$$

где $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ – неизвестные параметры линейной регрессии в стандартизованном виде; R^2 – коэффициент детерминации; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$ – бинарные переменные, которые определяются по правилу

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я объясняющая переменная входит в модель,} \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

M – большое положительное число; J^+, J^- – индексные подмножества, элементы которых удовлетворяют условиям $r_{yx_j} > 0$ и $r_{yx_j} < 0$; $C_{x_j}^{abc} = r_{yx_j} \cdot \beta_j$ – абсолютный вклад j -й переменной в общую детерминацию R^2 ; параметр $\theta \geq 0$ – наименьшая величина абсолютных вкладов входящих в модель переменных; параметр $0 \leq r \leq 1$ – наибольшая величина коэффициентов интеркорреляций входящих в модель переменных.

Решение задачи ЧБЛП (1) – (7) приводит к построению линейной регрессии с оптимальным по критерию R^2 количеством объясняющих переменных, в которой $r_{yx_j} \cdot \beta_j > 0, j \in \Phi$, вклады $C_{x_j}^{abc} \geq \theta, j \in \Phi$, а интеркорреляции $\left| r_{x_i x_j} \right| \leq r, i, j \in \Phi, i < j$, где Φ – множество номеров отобранных объясняющих переменных. Заметим, что в построенной регрессии некоторые коэффициенты могут оказаться незначимыми по t -критерию Стьюдента, либо может возникнуть мультиколлинеарность сразу между несколькими переменными. Избежать этого можно, дополнив задачу (1) – (7) линейными ограничениями из работ [13, 14].

Как известно, эффективность решения задачи ЧБЛП (1) – (7) зависит от выбора большого положительного числа M : если оно слишком велико, то процесс решения может замедлиться, а если мало, то найденное решение может оказаться неоптимальным. Выбор границ параметра M для задачи (1) – (7) обсуждается в [16]. Сначала определяются параметры $M_{\beta_j}, j = \overline{1, l}$ для линейных ограничений (3) и (4) по формулам:

$$M_{\beta_j} = \frac{R_{\max}}{r_{yx_j}}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (8)$$



где R_{\max} – коэффициент детерминации регрессии, построенной со всеми l объясняющими переменными. Для удобства можно всегда брать $R_{\max} = 1$.

Затем находятся параметры $M_{u_j}^-$, $j = \overline{1, l}$ для линейных ограничений (2). Для этого нужно решить серию из l задач линейного программирования при $p = 1, 2, \dots, l$:

$$M_{u_p}^- = \sum_{k=1}^l r_{x_p x_k} \cdot \beta_k - r_{y x_p} \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$0 \leq \beta_j \leq M_{\beta_j}, \quad j \in J^+, \quad (10)$$

$$M_{\beta_j} \leq \beta_j \leq 0, \quad j \in J^-, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^l r_{y x_j} \cdot \beta_j \leq R_{\max}. \quad (12)$$

После чего аналогично для линейных ограничений (2) находятся параметры $M_{u_j}^+$, $j = \overline{1, l}$. Для этого решается та же серия задач (9) – (12), но с целевыми функциями на максимум.

И, наконец, в задаче ЧБЛП (1) – (7) ограничения (2) – (4) нужно заменить на следующие:

$$(1 - \delta_j) \cdot M_{u_j}^- \leq \sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \cdot \beta_k - r_{y x_j} \leq (1 - \delta_j) \cdot M_{u_j}^+, \quad j = \overline{1, l}, \quad (13)$$

$$0 \leq \beta_j \leq \delta_j \cdot M_{\beta_j}, \quad j \in J^+, \quad (14)$$

$$\delta_j \cdot M_{\beta_j} \leq \beta_j \leq 0, \quad j \in J^-. \quad (15)$$

Формировать задачу ЧБЛП (1), (5) – (7), (13) – (15) по реальной выборке данных для программы-решателя вручную не представляется возможным, особенно, если эта выборка большого объема. Для этого была разработана программа построения вполне интерпретируемых элементарных и неэлементарных квазилинейных регрессионных моделей (ВИнтер-2). Она позволяет в зависимости от выбранных пользователем начальных параметров автоматически формировать для решателя LPSolve IDE задачи ЧБЛП для построения различных, в частности, линейных, регрессионных моделей. Для формирования задачи (1), (5) – (7), (13) – (15) нужно выбрать: 1) число отбираемых регрессоров (при необходимости); 2) число знаков после запятой в действительных числах; 3) параметр θ ; 4) параметр r . Выбор больших чисел M осуществляется автоматически. Сформированная задача представляет собой следующую последовательность блоков: 1) целевая функция (1); 2) левые части двойных неравенств (13); 3) правые части двойных неравенств (13); 4) левые и правые части двойных неравенств (14) и (15), содержащие бинарные переменные; 5) левые и правые части двойных неравенств (14) и (15), не содержащие бинарных переменных; 6) ограничения (6); 7) ограничения (7); 8) ограничения типа $b12 > = -\text{Inf}$, указывающие на то, что переменные $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ могут быть не только неотрицательными, но и отрицательными; 9) ограничения типа $d10 < = 1$, указывающие верхние границы



целочисленных переменных; 10) ограничение типа int d1,d2,d3, указывающее на бинарность целочисленных переменных.

Сформированную задачу нужно вручную открыть в решателе LPSolve, после запуска которого наблюдать за процессом её решения.

3. ОПИСАНИЕ ДАННЫХ И ИХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА

Для проведения вычислительных экспериментов были использованы статистические данные, представленные в табл. 2. В третьем столбце указан объем выборки n и количество объясняющих переменных l . Как видно по табл. 2, в каждом наборе данных его объем n превосходит число объясняющих переменных l . Поэтому предварительно, чтобы убедиться в корректности данных, в пакете Gretl по каждому набору с помощью МНК оценивались модели множественной линейной регрессии. С наборами данных Data1, Data3 и Data5 проблем не возникло, были получены модели без совершенной коллинеарности с коэффициентами детерминации 0.620157, 0.737267 и 0.237001 соответственно.

При построении модели по набору Data2 была выявлена функциональная зависимость:

$$diffSeTime8 = SeTime6 - SeTime7 + 0.5SeTime8 - 0.5SeTime9 - 0.5diffSeTime6,$$

приводящая к совершенной коллинеарности. При этом установлено, что переменные $diffSeTime2$ и $diffSeTime8$ содержат только 2 отличных от нуля значения (-0,001 и 0,001). Поэтому было принято решение исключить эти факторы. В результате осталось 38 объясняющих переменных. В оцененной по новому набору Data2* линейной регрессии нет совершенной коллинеарности, а её коэффициент детерминации составил 0,819211.

Таблица 2

Описание данных и их характеристики

№	Название (источник); описание; зависимые переменные	(n, l)	Распределение коэффициентов интеркорреляций	Распределение коэффициентов корреляции с y
1	Data1 (пакет Gretl, встроенный файл data7–20.gdt); данные о зарплатах игроков НБА; SALARY	(56, 25)		

№	Название (источник); описание; зависимые переменные	(n, l)	Распределение коэффициентов интеркорреляций	Распределение коэффициентов корреляции с y
2	Data2 (сайт [17]); данные об элэронах самолёта F16; Goal	(13750, 40)		
3	Data3 (сайт [18]); данные о критической температуре сверхпроводников; critical_temp	(21263, 81)		
4	Data4 (сайт [19]); данные о стоимостях строительства и ценах продаж квартир в Иране; V-9, V-10	(372, 103)		
5	Data5 (сайт [20]); данные о годах выпуска песен; year	(515345, 90)		

Набор данных Data4 содержит две зависимых переменных – V-9 и V-10. Поэтому выборку с зависимой переменной V-9 будем называть Data4a, а с V-10 – Data4b. В модели, оцененной по набору Data4a, выявлена совершенная коллинеарность, поэто-

му Gretl автоматически исключил 29 переменных. Коэффициент детерминации итоговой модели составил 0,987584. Аналогично, по набору Data4b было исключено 29 факторов, а для итоговой регрессии $R^2 = 0,982121$. Для проведения вычислительных экспериментов было принято решение в наборах Data4a и Data4b оставить список из 103 переменных в полном составе.

4. ОЦЕНКА СКОРОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОИР МЕТОДОМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

Получить решение задачи ЧБЛП (1), (5) – (7), (13) – (15) можно также тривиальным способом, организовав полный перебор всех возможных вариантов регрессионных моделей. Для того чтобы была возможность сравнивать эффективность двух этих подходов, требовалось найти статистическую зависимость скорости ν решения задач ОИР полным перебором от заданного числа регрессоров m . Для этого был разработан специальный скрипт для пакета Gretl, реализующий процедуру отбора ровно m регрессоров в линейной регрессии по следующему алгоритму:

1. формируется матрица всех возможных комбинаций регрессоров, содержащая C_l^m строк и m столбцов;
2. по выборке находятся корреляционные матрицы R_{xx} и R_{yx} ;
3. с помощью матрицы комбинаций в цикле с помощью матриц R_{xx} и R_{yx} находятся стандартизованные оценки линейной регрессии и коэффициенты детерминации R^2 ;
4. выбирается лучшая модель с наибольшей величиной R^2 .

С помощью этого скрипта на персональном компьютере с процессором Intel Core i5-4670 CPU (3.40 GHz) и объемом оперативной памяти 8 GB RAM было проведено два эксперимента – по набору данных Data3 и Data5. Число m задавалось равным 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25, 30, 35, 36, 37, 40, 45, 50, 55, 58, 64, 70 (при $m = 1$ задача решается практически мгновенно). Для каждого m фиксировалось общее количество обработанных моделей и время решения задачи ОИР (без учёта времени формирования матрицы комбинаций) в секундах. В результате были найдены скорости ν (моделей/сек), как отношения общего числа моделей ко времени. Сразу было установлено, что при переходе с $m = 36$ на $m = 37$ в обоих экспериментах произошел солидный скачок скорости ν в сторону уменьшения. Поэтому было принято решение строить статистические зависимости отдельно при $m \in [2, 36]$ и при $m \geq 37$.

На рис. 1 синими точками указаны скорости, полученные при обработке выборки Data3, а оранжевыми – Data5. Как видно, эти скорости при равных m практически не отличаются. Кроме того, зависимость ν от m носит нелинейный характер.

Для построения зависимостей в качестве объясняемой переменной была использована средняя скорость $\bar{\nu}$. С помощью МНК оценивалась степенная функция $\bar{\nu} = \alpha_0 m^{\alpha_1}$ при $m \in [2, 36]$ и $\bar{\nu} = \alpha_0 (m - 36)^{\alpha_1}$ при $m \geq 37$. Коэффициенты детерминации оцененных моделей в прологарифмированном виде составили 0,9799 и 0,9856, что подтверждает их высокое качество. Итоговая зависимость средней скорости



\bar{v} решения задач ОИР полным перебором (на конкретном персональном компьютере) имеет вид:

$$\bar{v} = \begin{cases} e^{12,9507} m^{-1,45763}, & \text{при } 2 \leq m \leq 36, \\ e^{6,74197} (m-36)^{-0,341061}, & \text{при } m \geq 37. \end{cases} \quad (16)$$

На рис. 1 черным цветом указаны расчетные по формуле (16) скорости, которые практически совпадают с фактическими.

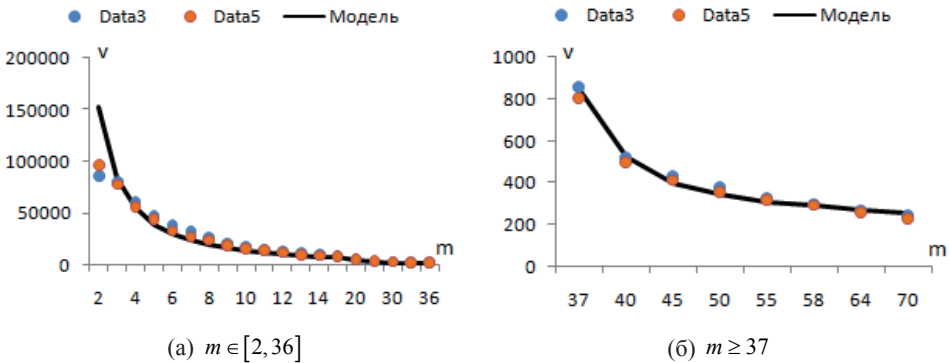


Рис. 1. Зависимости скоростей от числа m

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core i5-4670 CPU (3.40 GHz) и объемом оперативной памяти 8 GB RAM. Решались задачи ЧБЛП (1), (5) – (7), (13) – (15) по наборам данных Data1, Data2*, Data3, Data4a, Data4b и Data5 в зависимости от заданных параметров r и θ . Параметр r для всех выборок задавался равным от 0,1 до 1 с шагом 0,1. Наименьшее значение параметра θ равно 0, а наибольшее θ_{\max} выбиралось так, чтобы при $\theta = \theta_{\max}$ и $r = 0,1$ происходил отбор одного или двух регрессоров. Для формирования задач ЧБЛП была использована программа ВИнтер-2, точность действительных чисел – 12 знаков после запятой. Большие числа M в ограничениях (13) – (15) ВИнтер-2 определяет автоматически по формулам (8) при $R_{\max} = 1$ и как результат решения серий задач линейного программирования типа (9) – (12). Решателем задач ЧБЛП выступает пакет LPSolve IDE с настройками по умолчанию. Лимит времени на решение задачи составляет 1800 секунд (полчаса). Все эксперименты проводились в предположении, что знаки коэффициентов корреляции объясняющих переменных с y согласуются с содержательным смыслом факторов.

Результаты вычислительных экспериментов по данным Data1 представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data1

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	4 0,2653 0,476	5 0,2655 1,241	7 0,3106 2,791	8 0,3236 4,650	10 0,3899 5,601	10 0,3899 12,041	11 0,4124 10,716	11 0,4335 28,438	11 0,4335 35,705	14 0,4446 53,507
0,001	4 0,2653 0,505	4 0,2653 1,168	6 0,3097 2,467	7 0,3231 4,080	8 0,3869 5,119	8 0,3869 9,790	9 0,4118 10,741	9 0,4335 24,513	9 0,4335 33,431	11 0,4439 30,999
0,005	4 0,2653 0,466	4 0,2653 0,900	6 0,3097 1,632	6 0,3225 2,120	6 0,3819 2,604	6 0,3819 4,492	8 0,4116 4,580	8 0,4314 9,258	8 0,4314 12,051	8 0,4314 17,781
0,01	2 0,2495 0,400	2 0,2495 0,737	3 0,2925 1,220	4 0,3062 1,588	5 0,3807 1,919	5 0,3807 3,010	6 0,4044 3,189	7 0,4256 5,875	7 0,4256 7,675	7 0,4256 10,781
0,05	1 0,2416 0,239	1 0,2416 0,310	1 0,2416 0,607	1 0,2416 0,794	2 0,2674 0,910	2 0,2674 1,390	2 0,2674 1,511	2 0,2674 2,588	2 0,2674 3,284	2 0,2674 4,400

В табл.3 для каждой пары значений параметров r и θ указано количество отобранных переменных m , коэффициент детерминации R^2 найденной модели, время t решения задачи в секундах. По этой таблице видно, что, во-первых, во всех 50 случаях получено оптимальное решение в установленный получасовой лимит. Во-вторых, больше всего времени (53,507 с) ушло на решение задачи при $\theta = 0$ и $r = 1$ (при полном отсутствии требований на вклады переменных и мультиколлинеарность), а меньше всего (0,239 с) – при $\theta = 0,05$ и $r = 0,1$ (при самых жестких требованиях на вклады переменных и мультиколлинеарность). В целом по табл. 3 можно наблюдать, что увеличение θ (ужесточение требования на вклады) и уменьшение r (ужесточение требования на мультиколлинеарность) практически всегда снижает время решения задачи.

Решить любую задачу из табл. 3 можно методом полного перебора. Причём, при $\theta = 0, 0,001, 0,005, 0,01$ для этого пришлось бы оценить $2^{25} - 1 = 33554431$ моделей. С помощью формулы (16) установлено, что на это потребовалось бы (без учёта времени на формирование матриц комбинаций и проверки условий) примерно 3206,46 с. Отсюда следует, что эффективность решения задач ОИР представленным способом в LPSolve оказалась в 59,9–8016,1 раз выше, чем методом полного перебора в Gretl. Поскольку значение R^2 для модели со всеми 25 переменными составляет 0,620157, то при $\theta = 0,05$ максимальное число регрессоров $m = \left\lfloor \frac{0,620157}{0,05} \right\rfloor = 12$, поэтому пришлось бы оценить только $\sum_{i=1}^{12} C_{25}^i = 16777215$ моделей, на что потребуется примерно 1232,81 с. В этом случае эффективность решения задач ОИР нашим методом оказалась в 280,2–5158,2 раз выше, чем методом полного перебора.

Результаты вычислительных экспериментов по данным Data2* представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data2*

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	5 0,5893 12,863	9 0,6996 33,198	13 0,7159 72,437	11 0,8129 103,799	11 0,8129 149,199	14 0,8129 150,915	15 0,8147 204,339	15 0,8147 248,128	15 0,8147 247,745	18 0,8148 365,958
0,0005	3 0,5887 8,019	7 0,6995 17,779	10 0,7154 29,021	6 0,8128 40,145	6 0,8128 53,399	7 0,8128 55,803	7 0,8143 73,818	7 0,8143 80,246	7 0,8143 79,919	11 0,8145 88,751
0,001	3 0,5887 6,959	5 0,6970 15,336	8 0,7127 22,617	5 0,8122 31,016	5 0,8122 41,017	6 0,8123 43,394	7 0,8139 56,285	7 0,8139 60,167	7 0,8139 59,634	8 0,8142 57,594
0,01	2 0,5857 5,513	4 0,6956 8,093	4 0,6956 9,199	4 0,8104 10,514	4 0,8104 15,558	4 0,8104 16,499	4 0,8104 18,942	4 0,8104 19,330	4 0,8104 19,161	6 0,8107 21,441
0,05	2 0,5857 1,982	3 0,6435 2,840	3 0,6435 2,758	3 0,7514 3,836	3 0,7514 5,242	3 0,7514 5,455	3 0,7514 5,508	3 0,7514 5,509	3 0,7514 5,418	5 0,7518 5,257

Как видно, снова во всех 50 случаях получено оптимальное решение в установленный получасовой лимит. И вновь в большинстве случаев чем выше θ и ниже r , тем меньше время решения задачи. Больше всего времени (365,958 с) ушло на решение задачи при $\theta = 0$ и $r = 1$, а меньше всего (1,982 с) – при $\theta = 0,05$ и $r = 0,1$. Замечено, что, например, при $\theta = 0$ с ростом r число отобранных регрессоров может убывать.

При $\theta = 0, 0.0005, 0.001, 0.01$ методом перебора пришлось бы оценить $2^{38} - 1 = 274877906943$ (275 миллиардов) моделей, на что потребовалось бы примерно 48138036,2 с или 557 суток непрерывной работы компьютера. Таким образом, эффективность решения задач ОИР представленным способом в LPSolve оказалась в 131540–8731732 раз выше, чем методом полного перебора в Gretl. При $\theta = 0,05$ максимальное число регрессоров $m = \left\lceil \frac{0,819211}{0,05} \right\rceil = 16$, поэтому пришлось бы оценить $\sum_{i=1}^{16} C_{38}^i = 57407177581$ моделей, на что потребуется примерно 6903730,63 с. В этом случае эффективность решения задач ОИР нашим методом в 1253173–3483214 раз выше, чем методом полного перебора.

Вычислительные эксперименты по набору данных Data3 проводились в четырех разных условиях: 1) прямой порядок объясняющих переменных от 1 до 81; 2) обратный порядок объясняющих переменных от 81 до 1; 3) обратный порядок объясняющих переменных и задача ЧБЛП (1) – (7) с параметрами $M=50$; 4) обратный

порядок объясняющих переменных, задача ЧБЛП (1) – (7) с параметрами $M=50$ и дополнительными ограничениями на R^2 :

$$\sum_{j=1}^l r_{yx_j} \cdot \beta_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^l r_{yx_j} \cdot \beta_j \geq r^*, \quad (17)$$

где r^* – нижняя граница коэффициента детерминации. Это значение всегда можно брать равным максимальному из коэффициентов детерминации однофакторных линейных регрессий. В данном случае в условиях №4 таблица результатов формировалась построчно слева направо, начиная с нижнего левого угла ($\theta = 0,1$, $r = 0,1$). При этом значение r^* для активных $\theta_{\text{акт}}$ и $r_{\text{акт}}$ выбиралось равным максимальному из коэффициентов детерминации моделей, полученных на предыдущих шагах при $\theta > \theta_{\text{акт}}$ и $r < r_{\text{акт}}$. Точность величины r^* составляла 6 знаков после запятой.

Результаты вычислительных экспериментов по данным Data3 представлены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data3

θ \ r	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Условия № 1. Прямой порядок переменных										
0	2 0,5397 197,767	4 0,5666 1621,51	8 0,5994 1800	11 0,6165 1800	13 0,6554 1800	14 0,6453 1800	17 0,6446 1800	19 0,6437 1800	22 0,6185 1800	– – 1800
0,01	2 0,5397 201,172	5 0,5665 1273,26	6 0,5894 1800	9 0,6022 1800	9 0,6022 1800	11 0,5787 1800	13 0,6184 1800	15 0,6121 1800	15 0,6121 1800	16 0,6314 1800
0,05	1 0,5202 133,713	1 0,5202 502,107	5 0,5817 1268,24	4 0,5881 1800	7 0,5376 1800	– – 1800	– – 1800	– – 1800	– – 1800	– – 1800
0,07	1 0,5202 110,147	1 0,5202 332,869	2 0,5582 631,762	5 0,5749 1103,64	4 0,6113 1467,54	4 0,6119 1704,19	4 0,6119 1800	4 0,6119 1800	4 0,6119 1800	4 0,6119 1800
0,10	1 0,5202 80,43	1 0,5202 175,849	1 0,5202 304,19	1 0,5202 454,936	3 0,5835 574,821	4 0,5983 617,37	4 0,5983 629,754	4 0,5983 618,929	4 0,5983 728,914	4 0,5983 655,219
Условия № 2. Обратный порядок переменных										
0	2 0,5397 188,246	4 0,5666 1679,87	8 0,5994 1800	12 0,6176 1800	13 0,6552 1800	14 0,6392 1800	18 0,6367 1800	– – 1800	– – 1800	– – 1800
0,01	2 0,5397 167,225	5 0,5665 1209,17	5 0,5948 1800	9 0,6297 1800	11 0,6180 1800	12 0,6341 1800	14 0,6420 1800	14 0,6420 1800	– – 1800	– – 1800
0,05	1 0,5202 93,31	1 0,5202 385,996	5 0,5817 666,43	4 0,5881 878,796	5 0,6160 826,987	5 0,6273 715,434	7 0,6393 677,096	7 0,6393 695,793	7 0,6393 878,9	7 0,6393 903,362

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,07	1 0,5202 81,226	1 0,5202 241,379	2 0,5582 431,757	5 0,5749 457,4	4 0,6113 407,74	4 0,6119 393,263	4 0,6119 384,443	4 0,6119 396,190	4 0,6119 434,534	4 0,6119 443,542
0,10	1 0,5202 59,355	1 0,5202 174,296	1 0,5202 269,955	1 0,5202 267,461	3 0,5835 223,619	4 0,5983 203,14	4 0,5983 192,821	4 0,5983 198,769	4 0,5983 216,876	4 0,5983 211,203
Условия № 3. Обратный порядок переменных, M=50										
0	2 0,5397 122,945	4 0,5666 1350,71	8 0,5994 1800	12 0,6176 1800	12 0,6199 1800	14 0,6392 1800	18 0,6430 1800	– – 1800	– – 1800	16 0,5957 1800
0,01	2 0,5397 97,617	5 0,5665 884,315	5 0,5948 1800	9 0,6297 1800	11 0,6180 1800	12 0,6341 1800	14 0,6420 1800	14 0,6420 1800	– – 1800	– – 1800
0,05	1 0,5202 58,057	1 0,5202 262,76	5 0,5817 401,332	4 0,5881 575,673	5 0,6160 586,709	5 0,6273 471,719	7 0,6393 430,101	7 0,6393 432,044	7 0,6393 534,787	7 0,6393 522,983
0,07	1 0,5202 51,048	1 0,5202 159,867	2 0,5582 287,328	5 0,5749 354,384	4 0,6113 372,046	4 0,6119 355,241	4 0,6119 324,892	4 0,6119 318,005	4 0,6119 332,508	4 0,6119 346,67
0,10	1 0,5202 44,343	1 0,5202 133,396	1 0,5202 224,789	1 0,5202 283,247	3 0,5835 294,821	4 0,5983 260,734	4 0,5983 249,054	4 0,5983 247,104	4 0,5983 276,976	4 0,5983 271,1
Условия № 4. Обратный порядок переменных, M=50, доп. ограничения на R²										
0	2 0,539710 108,714	4 0,566696 772,040	8 0,599489 1800	– – 1800	13 0,655216 1800	– – 1800	18 0,662074 1800	18 0,662192 1800	16 0,666679 1800	– – 1800
0,01	2 0,539710 99,664	5 0,566547 1085,624	6 0,589429 1800	9 0,629783 1800	10 0,650646 1800	11 0,654328 1800	12 0,655761 1800	12 0,655761 1800	11 0,659170 1800	– – 1800
0,05	1 0,520231 54,256	1 0,520231 249,392	5 0,581710 335,111	4 0,588120 462,939	5 0,616071 358,06	5 0,627385 318,455	7 0,639385 288,019	7 0,639385 1800	7 0,639385 1800	7 0,639385 1800
0,07	1 0,520231 40,110	1 0,520231 112,673	2 0,558250 118,839	5 0,574943 185,496	4 0,611381 123,995	4 0,611953 107,23	4 0,611953 132,089	4 0,611953 125,089	4 0,611953 150,584	4 0,611953 144,08
0,10	1 0,520231 26,751	1 0,520231 48,796	1 0,520231 60,380	1 0,520231 71,449	3 0,583520 35,280	4 0,598350 35,910	4 0,598350 32,866	4 0,598350 30,728	4 0,598350 31,091	4 0,598350 30,568

В табл. 5 для наглядности серым цветом выделены ячейки, для которых за полчаса либо не доказана оптимальность решения задачи, либо вообще не получено решение. Для сравнения результатов вычислительных экспериментов, проведенных в четырех условиях, была составлена табл. 6. Во втором её столбце для каждого условия указан процент оптимальных решений 50 задач, в третьем – процент задач без решения в установленный лимит времени, в четвертом – общее время решения 50-ти задач,

в пятом – среднее время поиска оптимального решения, в шестом – среднее значение R^2 для моделей с доказанной и не доказанной оптимальностью.

Таблица 6

**Показатели эффективности решенных
по данным Data3 задач в зависимости от условий**

Условие	Оптимальные решения, %	Решения без результата за 30 мин, %	Общее время решения 50-ти задач, с	Среднее время на поиск оптимального решения, с	Среднее качество моделей по R^2
1	46	12	63988,33	669,95	0,584779
2	68	10	44455,58	460,45	0,591822
3	68	8	40719,31	350,56	0,591276
4	62	8	39976,28	186,33	0,597076

По табл. 6 можно сделать следующие выводы.

1. Порядок следования объясняющих переменных в исходной выборке может существенно влиять на скорость решения задачи ЧБЛП. Оказалось, что изменение порядка следования переменных с прямого (от 1 до 81) на обратный (от 81 до 1) увеличило процент оптимальных решений на 22 %, снизило процент решений без результата на 2 %, уменьшило общее время решения 50-ти задач на 19533 с (примерно на 5,5 часов) и среднее время на поиск оптимального решения на 209,5 с, а также увеличило среднее качество моделей по R^2 на 0,007043.
2. На скорость решения задачи ЧБЛП могут существенно влиять выбранные значения больших чисел M . Получилось, что по выборке с обратным порядком следования переменных изменение в задаче (1), (5) – (7), (13) – (15) всех больших чисел на $M = 50$ уменьшило процент решений без результата на 2 %, общее время решения 50-ти задач на 3736,27 с, среднее время на поиск оптимального решения на 109,89. При этом процент оптимальных решений не изменился, а среднее качество моделей по R^2 снизилось на 0,000546.
3. Внедрение ограничений (17) может существенно влиять на скорость решения задачи ЧБЛП. Последовательное проведение экспериментов в условиях № 4 оказалось самым эффективным. По сравнению с экспериментами в условиях № 3 уменьшилось общее время решения 50-ти задач на 743,03 с, среднее время на поиск оптимального решения на 164,23 с, увеличилось среднее качество моделей по R^2 на 0,0058. Процент решений без результата не изменился, а процент оптимальных решений снизился на 6 % из-за задач при $\theta = 0,05$, $r = 0,8, 0,9, 1$.

Для сравнения с методом перебора была взяты результаты вычислительных экспериментов (только оптимальные решения), полученные в условиях № 3. Тут снова прослеживается снижение времени решения задач при больших θ и малых r .

При $\theta = 0$ методом перебора пришлось бы оценить $2^{81} - 1 = 2417851639229258349412351$ (2,4 септиллиона) моделей примерно за $4,27 \cdot 10^{21}$ с; при $\theta = 0,01$ – примерно то же самое; при $\theta = 0,05$ –

$\sum_{i=1}^{14} C_{81}^i = 2283695211364530$ (2,3 квадриллиона) моделей примерно за $2,47 \cdot 10^{11}$ с (7853 года); при $\theta = 0,07 - \sum_{i=1}^{10} C_{81}^i = 2175273626013$ (2,1 триллионов) моделей примерно за 144911622 с (4,6 лет); при $\theta = 0,1 - \sum_{i=1}^7 C_{81}^i = 3829130793$ (3,8 миллиарда) моделей примерно за 151981 с (42,2 часов).

Таким образом, эффективность решения задач ОИР нашим методом в LPSolve при $\theta = 0$ в $3,16 \cdot 10^{18} - 3,47 \cdot 10^{19}$ раз, при $\theta = 0,01$ в $4,82 \cdot 10^{18} - 4,37 \cdot 10^{19}$ раз, при $\theta = 0,05$ в 420992349–4254439602 раз, при $\theta = 0,07$ в 389499,2–2838732,6 раз, при $\theta = 0,1$ в 515,5–3427,4 раз выше, чем методом полного перебора в Gretl. Подтверждают эффективность и дополнительные эксперименты при $\theta = 0,01$ и $r = 0,3, 0,4, 0,5, 0,6$. Эти задачи были решены за 3278,48 с, 7383,34 с, 11866,6 с и 12386,7 с соответственно. Количества отобранных переменных и коэффициенты детерминации построенных моделей оказались следующие: (5, 0.5948), (9, 0.6297), (10, 0.6520) и (11, 0.6543).

Вычислительные эксперименты по набору данных Data4a проводились в двух разных условиях: 1) без ограничений на R^2 ; 2) с ограничениями (17) на R^2 , $r^* = 0,95$. Результаты представлены в табл. 7.

Таблица 7

Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data4a

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Условия № 1а. Без ограничений на R^2										
0	3 0,9586 254,802	6 0,9590 1044,10	7 0,9613 284,86	9 0,9621 363,74	10 0,9636 534,326	10 0,96412 450,241	10 0,96412 753,755	11 0,96416 727,38	11 0,96416 903,586	11 0,96416 771,539
0,005	2 0,9586 204,809	2 0,9586 1574,24	4 0,9609 545,858	6 0,9615 960,526	9 0,9634 1477,09	10 0,9634 1800	13 0,5124 1800	14 0,5188 1800	14 0,5188 1800	14 0,5188 1800
0,007	2 0,9586 190,126	2 0,9586 1189,97	3 0,9605 810,467	3 0,9605 1375,36	9 0,6942 1800	10 0,6982 1800	12 0,7092 1800	11 0,7128 1800	14 0,7133 1800	15 0,7134 1800
0,01	2 0,9586 167,112	2 0,9586 868,475	2 0,9586 968,963	2 0,9586 1557,69	10 0,6981 1800	9 0,6965 1800	10 0,7090 1800	11 0,6836 1800	12 0,7131 1800	13 0,7132 1800
0,015	1 0,9534 174,815	1 0,9534 554,243	1 0,9534 788,331	1 0,9534 1169,25	4 0,9564 1423,2	8 0,6822 1800	8 0,7031 1800	12 0,6817 1800	10 0,6743 1800	8 0,5689 1800
Условия № 2а. С ограничениями на R^2										
0	3 0,9586 31,949	6 0,9590 47,057	7 0,9613 73,006	9 0,9621 101,18	10 0,9636 160,98	10 0,96412 160,675	10 0,96412 191,21	11 0,96416 173,251	11 0,96416 165,566	11 0,96416 117,857
0,005	2 0,9586 58,102	2 0,9586 83,709	4 0,9609 106,131	6 0,9615 115,674	9 0,9634 108,645	8 0,9638 108,432	8 0,9638 115,711	9 0,9638 103,331	9 0,9638 94,869	9 0,9638 64,817



$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,007	2 0,9586 55,209	2 0,9586 76,711	3 0,9605 89,198	3 0,9605 101,247	8 0,9632 90,868	7 0,9635 90,318	8 0,9636 91,7	8 0,9636 79,838	8 0,9636 71,328	8 0,9636 48,881
0,01	2 0,9586 46,585	2 0,9586 66,94	2 0,9586 75,757	2 0,9586 83,938	6 0,9620 75,291	6 0,9632 76,675	6 0,9633 77,701	6 0,9633 67,239	6 0,9633 59,494	6 0,9633 40,978
0,015	1 0,9534 38,231	1 0,9534 57,707	1 0,9534 70,649	1 0,9534 88,668	4 0,9564 70,492	5 0,9584 68,855	5 0,9584 69,151	5 0,9584 59,99	5 0,9584 52,417	5 0,9584 35,984

По табл. 7 видно, что в обоих условиях процент решений без результата составляет 0 %. Оказалось, что введение ограничений на R^2 увеличило процент оптимальных решений с 56 % до 100 %, снизило общее время решения 50-ти задач с 61688,85 с до 4260,19 с (примерно в 14,5 раз) и среднее время на поиск оптимального решения с 788,88 с до 85,2 с (примерно в 9,2 раза), увеличило среднее качество моделей по R^2 с 0,824478 до 0,960828.

Для сравнения с методом перебора была взяты результаты вычислительных экспериментов, полученные в условиях № 2а. Снова прослеживается снижение времени решения задач при больших θ и малых r . Но в этот раз оно менее выраженное.

При $\theta = 0, 0.005, 0.007$ методом перебора пришлось бы оценить $2^{103} - 1 = 10141204801825835211973625643007$ (10,1 нониллиона) моделей примерно за $3 \cdot 10^{28}$ с (без учёта времени на формирование матриц комбинаций и проверки условий); при $\theta = 0.01, 0.015$ – примерно то же самое.

Таким образом, эффективность решения задач ОИР нашим методом в LPSolve в $1,569 \cdot 10^{26} - 9,39 \cdot 10^{26}$ раз выше, чем методом полного перебора в Gretl.

Вычислительные эксперименты по набору данных Data4b проводились в двух разных условиях: 1) без ограничений на R^2 ; 2) с ограничениями (17) на R^2 , параметр $M = 60$, значение r^* с шестью знаками после запятой выбиралось так же, как при экспериментировании по выборке Data3 при условиях № 4. Результаты представлены в табл. 8.

Таблица 8

Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data4b

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Условия № 1б. Без ограничений на R^2										
0	1 0,9279 476,549	4 0,9579 1456,01	6 0,9589 1800	9 0,9606 1800	10 0,9615 1800	8 0,9630 1800	11 0,9660 1800	13 0,9665 1800	14 0,9665 1800	19 0,9666 1800
0,01	1 0,9279 407,725	2 0,9576 1223,05	4 0,8503 1800	9 0,8445 1800	10 0,8418 1800	9 0,8834 1800	13 0,8891 1800	10 0,8883 1800	12 0,8908 1800	15 0,8932 1800

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,02	1 0,9279 262,429	2 0,9576 925,852	2 0,9576 1732,88	10 0,8666 1800	10 0,8636 1800	10 0,9060 1800	11 0,9072 1800	10 0,8507 1800	10 0,8519 1800	11 0,8524 1800
0,03	1 0,9279 244,271	2 0,9576 761,42	2 0,9576 1260,54	2 0,9576 1800	9 0,8738 1800	9 0,9089 1800	8 0,8958 1800	8 0,8900 1800	7 0,7390 1800	8 0,7099 1800
0,04	1 0,9279 204,977	2 0,9576 496,809	2 0,9576 762,148	2 0,9576 1033,84	2 0,9576 1446,00	2 0,9576 1384,48	9 0,9152 1800	9 0,8881 1800	9 0,8881 1800	8 0,8878 1800
Условия № 2b. M=60, с ограничениями на R²										
0	1 0,927989 46,401	4 0,957929 1800	6 0,958979 1800	9 0,960627 1800	10 0,961561 1800	– – 1800	11 0,967157 1800	13 0,967616 1800	– – 1800	19 0,967702 1800
0,01	1 0,927989 52,337	2 0,957639 98,446	2 0,957639 234,152	3 0,958815 262,537	7 0,960867 265,578	8 0,963793 281,362	8 0,966249 526,623	10 0,967416 947,019	10 0,967416 1033,387	12 0,967487 759,165
0,02	1 0,927989 36,52	2 0,957639 69,071	2 0,957639 100,474	2 0,957639 123,127	2 0,957639 122,061	4 0,960368 116,364	6 0,964694 183,657	7 0,966500 164,036	7 0,966500 145,346	8 0,966540 110,548
0,03	1 0,927989 31,049	2 0,957639 54,54	2 0,957639 71,537	2 0,957639 84,363	2 0,957639 81,779	4 0,959505 83,223	4 0,961506 128,814	4 0,961806 123,908	4 0,961806 105,228	4 0,961806 76,214
0,04	1 0,927989 25,434	2 0,957639 46,274	2 0,957639 52,513	2 0,957639 62,761	2 0,957639 66,221	2 0,957639 72,432	3 0,961018 97,052	3 0,961018 85,535	3 0,961018 77,604	3 0,961018 55,490

По табл. 8 было установлено, что в условиях № 2b процент решений без результата увеличился с 0 % до 4 %, процент оптимальных решений увеличился с 32 % до 82 %, общее время решения 50-ти задач уменьшилось с 75279 с до 23360,2 с, среднее время на поиск оптимального решения уменьшилось с 879,9 с до 174,6 с, среднее качество моделей по R² увеличилось с 0,91034 до 0,957776.

Для сравнения с методом перебора была взяты результаты вычислительных экспериментов, полученные в условиях № 2b. Судить о влиянии θ и r на время решения задач не правомерно, поскольку все они были решены при разных r^* .

При $\theta=0$ методом перебора пришлось бы оценить $2^{103}-1$ моделей примерно за $3 \cdot 10^{28}$ с; при $\theta=0,01, 0,02$ – примерно то же самое; при $\theta=0,03$ – $\sum_{i=1}^{32} C_{103}^i = 7,76988 \cdot 10^{26}$ (0,777 октиллиона) моделей примерно за $2,7909 \cdot 10^{23}$ с; при $\theta=0,04$ – $\sum_{i=1}^{24} C_{103}^i = 2,52555 \cdot 10^{23}$ (0,252 септиллиона) моделей примерно за $6,0142 \cdot 10^{19}$ с.

Таким образом, эффективность решения задач ОИР нашим методом в LPSolve при $\theta=0, 0,01, 0,02$ в $2,903 \cdot 10^{25} - 8,215 \cdot 10^{26}$ раз, при $\theta=0,03$ в $2,166 \cdot 10^{21} - 8,989 \cdot 10^{21}$

раз, при $\theta = 0,04$ в $6,197 \cdot 10^{17} - 2,364 \cdot 10^{18}$ раз выше, чем методом полного перебора в Gretl.

Вычислительные эксперименты по самому крупному набору данных Data5 предварительно проводились по ненулевым значениям θ и низким значениям r . В установленные получасовые лимиты были получены следующие результаты: 1) при $\theta = 0,0075$ и $r = 0,1$ отобрано 3 регрессора, $R^2 = 0,06$, оптимальность не доказана; 2) при $\theta = 0,0075$ и $r = 0,2$ нет результата; 3) при $\theta = 0,01$ и $r = 0,1$ отобрано 2 регрессора, $R^2 = 0,0525$, оптимальность не доказана; 4) при $\theta = 0,01$ и $r = 0,2$ нет результата.

Таким образом, установленного получасового лимита оказалось недостаточно для решения задач по выборке Data5. Тем не менее, в некоторых случаях довольно быстро получаются близкие к оптимальным, а, возможно, и оптимальные, решения.

Далее было принято решение упорядочить объясняющие переменные по убыванию модулей их коэффициентов корреляции с y и из первых 40 факторов сформировать новую выборку Data5*. Для линейной регрессии со всеми 40 переменными $R^2 = 0,179946$. Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data5* представлены в табл. 9.

Таблица 9

Результаты вычислительных экспериментов по набору данных Data5

$\theta \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	8 0,0729 52,382	17 0,1001 1335,40	19 0,1359 1800	19 0,1482 1800	20 0,1690 1800	20 0,1691 1800	20 0,1691 1800	20 0,1691 1800	21 0,1694 1800	21 0,1694 1800
0,0025	6 0,0708 38,411	12 0,0990 564,321	13 0,1328 1493,81	14 0,1465 1761,19	12 0,1663 1417,78	12 0,1663 1635,9	12 0,1663 1655,63	12 0,1663 1663,39	12 0,1663 1681,36	12 0,1663 1661,53
0,005	4 0,0654 26,289	9 0,0918 214,816	7 0,1233 432,443	8 0,1363 595,44	7 0,1566 609,035	7 0,1566 667,344	7 0,1566 672,059	7 0,1566 695,564	7 0,1566 671,565	7 0,1566 670,639
0,0075	3 0,0600 22,405	4 0,0717 150,41	4 0,1073 286,088	5 0,1166 440,173	5 0,1493 440,781	5 0,1493 484,955	5 0,1493 487,463	5 0,1493 504,33	5 0,1493 483,014	5 0,1493 503,118
0,01	2 0,0525 21,002	3 0,0665 128,272	3 0,1032 239,305	4 0,1103 350,11	4 0,1394 358,752	4 0,1394 397,330	4 0,1394 396,758	4 0,1394 404,456	4 0,1394 397,752	4 0,1394 397,8

По табл. 9 можно сделать вывод, что оптимальных решений – 84 %, решений без результата – 0 %, общее время решения 50-ти задач – 41510 с, среднее время на поиск оптимального решения – 645,5 с, среднее качество моделей по R^2 – 0,1339. Значения в табл. 9 подтверждают, что с ростом θ и уменьшением r скорость решения задач практически всегда возрастает.

При $\theta = 0$ методом перебора пришлось бы оценить $2^{40} - 1$ моделей примерно за 207409219 с (6,57 лет); при $\theta = 0,0025, 0,005$ – примерно то же самое; при $\theta = 0,0075 - \sum_{i=1}^{23} C_{40}^i = 9,52 \cdot 10^{11}$ моделей примерно за 168933865 с (5,35 лет); при $\theta = 0,01 - \sum_{i=1}^{17} C_{40}^i = 2,36 \cdot 10^{11}$ моделей примерно за 31076852 с (1 год).

Таким образом, эффективность решения задач ОИР нашим методом в LPSolve при $\theta = 0, 0,0025, 0,005$ в 117766–7889582 раз, при $\theta = 0,0075$ в 334967–7540007 раз, при $\theta = 0,01$ в 76836–1479709 раз выше, чем методом полного перебора в Gretl.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подчеркнем основные результаты, полученные в данной работе.

Экспериментально доказано, что построение вполне интерпретируемой линейной регрессии предложенным методом, состоящим в решении задачи ЧБЛП (1), (5) – (7), (13) – (15), многократно эффективнее метода полного перебора. Для набора данных Data1 наш подход оказался эффективнее в 59,9–8016,1 раз; для Data2* – в 131540–8731732 раз; для Data3 – в 515,5 – 4,37 · 10¹⁹ раз; для Data4a – в 1,569 · 10²⁶ – 9,39 · 10²⁶ раз; для Data4b – в 6,19 · 10¹⁷ – 8,21 · 10²⁶ раз; для Data5* – в 76836–7889582 раз.

Среди полученных за получасовой промежуток времени 550-ти решений, представленных в табл. 3, 4, 5, 7, 8, 9, оптимальных оказалось 399 (72,6 %), обычных – 130 (23,6 %), отсутствующих – 21 (3,8 %). Таким образом, за приемлемое время в большинстве случаев были найдены оптимальные или близкие к ним решения.

Эффективность предложенного метода не зависит от объема выборки n , поэтому удалось обработать набор данных Data5*, содержащий 40 объясняющих переменных и 515345 наблюдений. Так, например, в работах [3–11] зарубежных авторов максимальный объем выборки для решения подобных задач составил всего 9358 наблюдений, т.е. примерно в 55 раз меньше.

Замечено, что выбор параметров θ и r может существенно влиять на скорость решения задачи ЧБЛП. Причём, с увеличением θ (ужесточение требований на вклады переменных) и уменьшением r (ужесточение требований на мультиколлинеарность) время решения задачи в большинстве случаев снижается, т.е. вполне интерпретируемая линейная регрессия строится быстрее, чем реализуется обычный ОИР без ограничений на θ и r .

Установлено, что на эффективность решения задачи ЧБЛП может существенно влиять порядок следования объясняющих переменных в выборке, параметр M , а также дополнительные ограничения (17) на коэффициент детерминации. Механизм влияния этих и других параметров на скорость решения задачи ЧБЛП требует дальнейших исследований.

Литература

1. *Стрижов В.В., Крымова Е.А.* Методы выбора регрессионных моделей. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2010. 60 с.

2. Miller A. Subset selection in regression. CRC Press, 2002.
3. Konno H., Yamamoto R. Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming // Journal of Global Optimization. 2009. Vol. 44. P. 273–282. DOI:10.1007/s10898-008-9323-9.
4. Miyashiro R., Takano Y. Mixed integer second-order cone programming formulations for variable selection in linear regression // European Journal of Operational Research. 2015. Vol. 247. P. 721–731. DOI:10.1016/j.ejor.2015.06.081.
5. Miyashiro R., Takano Y. Subset selection by Mallows' Cp: A mixed integer programming approach // Expert Systems with Applications. 2015. Vol. 42. P. 325–331. DOI:10.1016/j.eswa.2014.07.056.
6. Park Y.W., Klafjan D. Subset selection for multiple linear regression via optimization // Journal of Global Optimization. 2020. Vol. 77. P. 543–574. DOI:10.1007/s10898-020-00876-1.
7. Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T. Mixed integer quadratic optimization formulations for eliminating multicollinearity based on variance inflation factor // Journal of Global Optimization. 2019. Vol. 73. P. 431–446. DOI:10.1007/s10898-018-0713-3.
8. Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T. Best subset selection for eliminating multicollinearity // Journal of the Operations Research Society of Japan. 2017. Vol. 60(3). P. 321–336. DOI:10.15807/jorsj.60.321.
9. Bertsimas D., Li M.L. Scalable holistic linear regression // Operations Research Letters. 2020. Vol. 48, Is. 3. P. 203–208. DOI:10.1016/j.orl.2020.02.008.
10. Chung S., Park Y.W., Cheong T. A mathematical programming approach for integrated multiple linear regression subset selection and validation // Pattern Recognition. 2020. Vol. 108. DOI:10.1016/j.patcog.2020.107565.
11. Takano Y., Miyashiro R. Best subset selection via cross-validation criterion. Top. 2020. Vol. 28, Is. 2. P. 475–488. DOI: 10.1007/s11750-020-00538-1.
12. *Базилевский М.П.* Сведение задачи отбора информативных регрессоров при оценивании линейной регрессионной модели по методу наименьших квадратов к задаче частично-булевого линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. Т. 6. № 1 (20). С. 108–117.
13. *Базилевский М.П.* Отбор информативных регрессоров с учётом мультиколлинеарности между ними в регрессионных моделях как задача частично-булевого линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2018. Т. 6. № 2 (21). С. 104–118.
14. *Базилевский М.П.* Отбор значимых по критерию Стьюдента информативных регрессоров в оцениваемых с помощью МНК регрессионных моделях как задача частично-булевого линейного программирования // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2021. № 3. С. 5–16.
15. *Базилевский М.П.* Формализация процесса отбора информативных регрессоров в линейной регрессии в виде задачи частично-булевого линейного программирования с ограничениями на коэффициенты интеркорреляций // Современные наукоёмкие технологии. 2023. № 8. С. 10–14.
16. *Базилевский М.П.* Способ определения параметра М в задаче частично-булевого линейного программирования для отбора регрессоров в линейной регрессии // Вестник Технологического университета. 2022. Т. 25. № 2. С. 62–66.
17. Knowledge Extraction based on Evolutionary Learning [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://sci2s.ugr.es/keel/dataset.php?cod=93> (дата обращения 04.10.2023).
18. UCI Machine Learning Repository [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://archive.ics.uci.edu/dataset/464/superconductivity+data> (дата обращения 04.10.2023).



19. UCI Machine Learning Repository [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://archive.ics.uci.edu/dataset/437/residential+building+data+set> (дата обращения 04.10.2023).
20. UCI Machine Learning Repository [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://archive.ics.uci.edu/dataset/203/yearpredictionmsd> (дата обращения 04.10.2023).

Comparative Analysis of the Effectiveness of Methods for Constructing Quite Interpretable Linear Regression Models

Mikhail P. Bazilevskiy*

Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

e-mail: mik2178@yandex.ru

Previously, the author managed to reduce the problem of constructing a quite interpretable linear regression, estimated using ordinary least squares method, to a mixed-integer 0–1 linear programming problem. In such models, the signs of the estimates correspond to the substantive meaning of the factors, the absolute contributions of the variables to the overall determination are significant, and the degree of multicollinearity is small. The optimal solution to the formulated problem can also be found by generating all subsets method. The purpose of this article is to conduct a comparative analysis of the effectiveness of these two approaches. To conduct computational experiments, 5 sets of real statistical data of various volumes were used. As a result, more than 550 different mixed-integer 0–1 problems were solved using the LPSolve package under different conditions. At the same time, the efficiency of solving similar problems using the generating all subsets method in the Gretl package was assessed. In all experiments, our proposed method turned out to be many times more effective than the generating all subsets method. The highest efficiency was achieved in solving the subset selection problem from 103 variables, solving each of which by generating all subsets would require estimating approximately 2103 (10.1 nonillion) models, which a conventional computer would not have been able to cope with in 1000 years. In LPSolve, each of these problems was solved in 32–191 seconds. The proposed method was able to process a large data sample containing 40 explanatory variables and 515,345 observations in an acceptable time, which confirms the independence of its effectiveness from the sample size. It has been revealed that tightening the requirements for multicollinearity and absolute contributions of variables in the linear constraints of the problem almost always reduces the speed of its solution.

Keywords: linear regression, ordinary least squares method, interpretability, mixed-integer 0–1 linear programming problem, generating all subsets method, contributions of variables to determination, multicollinearity, efficiency.

For citation:

Bazilevskiy M.P. Comparative Analysis of the Effectiveness of Methods for Constructing Quite Interpretable Linear Regression Models. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 59–83. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130404> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Mikhail P. Bazilevskiy**, PhD (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru



References

1. Strizhov V.V., Krymova E.A. *Metody vybora regressionnykh modeley* [Methods for selecting regression models]. Moscow, Vychislitel'nyy tsentr im. A.A. Dorodnitsyna RAN, 2010. 60 p.
2. Miller A. *Subset selection in regression*. CRC Press, 2002.
3. Konno H., Yamamoto R. Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming, *Journal of Global Optimization*, 2009, vol. 44, pp. 273–282. DOI:10.1007/s10898-008-9323-9.
4. Miyashiro R., Takano Y. Mixed integer second-order cone programming formulations for variable selection in linear regression, *European Journal of Operational Research*, 2015, vol. 247, pp. 721–731. DOI:10.1016/j.ejor.2015.06.081.
5. Miyashiro R., Takano Y. Subset selection by Mallows' Cp: A mixed integer programming approach, *Expert Systems with Applications*, 2015, vol. 42, pp. 325–331. DOI:10.1016/j.eswa.2014.07.056.
6. Park Y.W., Klabjan D. Subset selection for multiple linear regression via optimization, *Journal of Global Optimization*, 2020, vol. 77, pp. 543–574. DOI:10.1007/s10898-020-00876-1.
7. Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T. Mixed integer quadratic optimization formulations for eliminating multicollinearity based on variance inflation factor, *Journal of Global Optimization*, 2019, vol. 73, pp. 431–446. DOI:10.1007/s10898-018-0713-3.
8. Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T. Best subset selection for eliminating multicollinearity, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 2017, vol. 60(3), pp. 321–336. DOI:10.15807/jorsj.60.321.
9. Bertsimas D., Li M.L. Scalable holistic linear regression, *Operations Research Letters*, 2020, vol. 48, is. 3, pp. 203–208. DOI:10.1016/j.orl.2020.02.008.
10. Chung S., Park Y.W., Cheong T. A mathematical programming approach for integrated multiple linear regression subset selection and validation, *Pattern Recognition*, 2020, vol. 108. DOI:10.1016/j.patcog.2020.107565.
11. Takano Y., Miyashiro R. Best subset selection via cross-validation criterion, *Top*, 2020, vol. 28, is. 2, pp. 475–488. DOI: 10.1007/s11750-020-00538-1.
12. Bazilevskiy M.P. Svedenie zadachi otbora informativnykh regressorov pri otsenivanii lineynoy regressionnoy modeli po metodu naimen'shikh kvadratov k zadache chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya [Reduction the problem of selecting informative regressors when estimating a linear regression model by the method of least squares to the problem of partial-Boolean linear programming], *Modeling, Optimization and Information Technology*, 2018. vol. 6, no. 1 (20), pp. 108–117.
13. Bazilevskiy M.P. Otbora informativnykh regressorov s uchedom mul'tikollinernosti mezhdru nimi v regressionnykh modelyakh kak zadacha chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya [Subset selection in regression models with considering multicollinearity as a task of mixed 0–1 integer linear programming], *Modeling, Optimization and Information Technology*, 2018, vol. 6, no. 2 (21), pp. 104–118.
14. Bazilevskiy M.P. Otbora znachimykh po kriteriyu St'yudenta informativnykh regressorov v otsenivaemykh s pomoshch'yu MNK regressionnykh modelyakh kak zadacha chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya [Selection of informative regressors significant by Student's t-test in regression models estimated using OLS as a partial Boolean linear programming problem], *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2021, no. 3, pp. 5–16.
15. Bazilevskiy M.P. Formalizatsiya protsessa otbora informativnykh regressorov v lineynoy regressii v vide zadachi chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya s ogranicheniyami na koeffitsienty interkorrelyatsiy [Formalization the subset selection process in linear regression as



- a mixed integer 0–1 linear programming problem with constraints on intercorrelation coefficients], *Modern High Technologies*, 2023, no. 8, pp. 10–14.
16. Bazilevskiy M.P. Sposob opredeleniya parametra M v zadache chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya dlya otbora regressorov v lineynoy regressii [Method for the M parameter determination in 0–1 mixed-integer linear programming problem for subset selection in linear regression], *Bulletin of the Technological University*, 2022, vol. 25, no. 2, pp. 62–66.
 17. Knowledge Extraction based on Evolutionary Learning [Elektronnyy resurs]. URL <https://sci2s.ugr.es/keel/dataset.php?cod=93> (Accessed 04.10.2023).
 18. UCI Machine Learning Repository [Elektronnyy resurs]. URL <https://archive.ics.uci.edu/dataset/464/superconductivity+data> (Accessed 04.10.2023).
 19. UCI Machine Learning Repository [Elektronnyy resurs]. URL <https://archive.ics.uci.edu/dataset/437/residential+building+data+set> (Accessed 04.10.2023).
 20. UCI Machine Learning Repository [Elektronnyy resurs]. URL <https://archive.ics.uci.edu/dataset/203/yearpredictionmsd> (Accessed 04.10.2023).

Получена 30.10.2023

Received 30.10.2023

Принята в печать 15.11.2023

Accepted 15.11.2023

УДК 519.853

Методы численного моделирования множеств 0-управляемости линейной дискретной динамической системы с ограниченным управлением на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации

Мохначева А.А. *

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>
e-mail: Arina140803@mail.ru

Герасимова К.В. **

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-8631>
e-mail: kristina.gerasimova.2002@gmail.com

Ибрагимов Д.Н. ***

Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>
e-mail: rikk.dan@gmail.com

В статье рассматривается задача построения полиэдральной аппроксимации множеств 0-управляемости линейной дискретной системы с линейными ограничениями на управление. Для проведения аппроксимации предлагается использование двух эвристических алгоритмов, нацеленных на уменьшение числа вершин произвольного многогранника при сохранении точности описания в смысле расстояния Хаусдорфа. Продемонстрировано сведение задачи вычисления расстояния между вложенными многогранниками к задаче выпуклого программирования. Исследованы вопросы оптимальности полученных аппроксимаций. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная дискретная система, множество управляемости, многогранник, метрика Хаусдорфа, полиэдральная аппроксимация, квадратичное программирование.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00293).

Для цитаты:

Мохначева А.А., Герасимова К.В., Ибрагимов Д.Н. Методы численного моделирования множеств 0-управляемости линейной дискретной динамической системы с ограниченным управлением на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 84–110. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130405>

***Мохначева Арина Александровна**, студентка кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>, e-mail: Arina140803@mail.ru

****Герасимова Кристина Вячеславовна**, студентка кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-8631>, e-mail: kristina.gerasimova.2002@gmail.com

*****Ибрагимов Данис Наилевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Использование множеств достижимости и управляемости в теории управления является довольно широкой практикой, начиная с фундаментальных монографий [1, 2, 9] и заканчивая современными работами в данной тематике [3, 4, 11, 13–21]. Они могут быть использованы как для анализа заданной системы на управляемость [11, 14, 17, 18, 21], так и для формирования оптимального позиционного управления [3, 4, 16] в различных задачах синтеза. В последнем случае множества управляемости и достижимости определяют набор ограничений в задачах выпуклого программирования, к которым сводится решение задачи оптимального управления.

В большинстве работ рассматриваются вопросы построения точного описания множеств управляемости [3, 4, 13, 18] либо исследования их общих свойств [11, 14, 15, 17, 19]. При этом построение точного описания в случае наличия ограничений на управление может быть весьма трудоемкой задачей с вычислительной точки зрения. Так при наличии исключительно линейных ограничений на управление все множества управляемости линейной дискретной системы представляют собой выпуклые многогранники [3], число вершин которых растет с экспоненциальной скоростью в зависимости от рассматриваемого временного горизонта [22]. В свою очередь, например, при решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы вычисление оптимального позиционного управления в случае линейных ограничений сводится к решению ряда задач линейного программирования, размерность которых



совпадает с числом крайних точек множества 0-управляемости [3], представляющего собой многогранник. Этот факт делает процедуру решения соответствующей задачи оптимального управления фактически нереализуемой стандартными средствами.

Известен подход, направленный на проведение аппроксимации множеств управляемости в случае их сложной структуры. Для этих целей используются, как правило, полиэдральные [20] и эллипсоидальные оценки [21]. Недостаток последних связан с недостаточным порядком точности и сложностью их применения для решения задач оптимального управления. Известные методы полиэдральной аппроксимации [5], наоборот, нацелены на достижение произвольной заранее заданной точности без учета сложности результирующей оценки.

В связи с этим оказывается актуальной адаптация методов полиэдральной аппроксимации множеств управляемости многогранниками с меньшим числом вершин при сохранении заданного порядка точности. Подробно методы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел с критерием качества в форме расстояния Хаусдорфа рассмотрены в [5]. Однако в отличие от классического подхода, нацеленного на построение аппроксимирующего многогранника за минимальное время, в данной статье предлагается минимизировать число вершин результирующего многогранника при фиксированном ограничении на погрешность аппроксимации, что позволит значительно снизить временные затраты на решение различных задач оптимального управления.

Целью данной работы является применение адаптивных методов полиэдральной аппроксимации для построения минимальной в смысле описания внутренней оценки множества 0-управляемости линейной дискретной системы с заданной точностью в смысле расстояния Хаусдорфа. Существенным является сохранение полиномиальной сложности рассматриваемых алгоритмов, что во многом базируется на их адаптивном характере [5] и сведении вычисления расстояния Хаусдорфа между вложенными многогранниками к задачам квадратичного программирования [6].

Обозначения

Для произвольного $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\text{conv } \mathcal{X}$ выпуклую оболочку множества \mathcal{X} – наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее \mathcal{X} в качестве подмножества. Через $\text{int } \mathcal{X}$ обозначим множество внутренних точек \mathcal{X} , через $\text{Ext } \mathcal{X}$ – множество крайних точек, которое для многогранника совпадает с множеством его вершин. Под $\text{card } \mathcal{X}$ будем подразумевать мощность множества \mathcal{X} , что в случае конечного \mathcal{X} является числом его элементов.

Пространство \mathbb{R}^n будем рассматривать в качестве евклидова со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Под нормой вектора $x \in \mathbb{R}^n$, если не оговорено иное, будем понимать норму, ассоциированную со скалярным произведением: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Диаметр множества



\mathcal{X} – расстояние между наиболее удаленными друг от друга его элементами – обозначим, через $\text{diam } \mathcal{X}$.

Для произвольных \mathcal{X} , $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ введем сумму по Минковскому и образ множества следующим образом:

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\}, \quad A\mathcal{U} = \{Au : u \in \mathcal{U}\}.$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система управления (A, \mathcal{U}) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, u(k) \in \mathcal{U}, k \in N \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что \mathcal{U} – выпуклый многогранник, содержащий 0 в качестве относительно внутренней точки:

$$U = \text{conv}\{u^1, \dots, u^M\}. \quad (2)$$

Без ограничения общности будем далее полагать, что $\{u^1, \dots, u^M\} \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с множеством вершин многогранника:

$$\text{Ext } \mathcal{U} = \{u^1, \dots, u^M\}.$$

Рассматривается задача построения класса множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ системы (1), где каждое $\mathcal{X}(N)$ состоит из тех начальных состояний, из которых систему (1) возможно перевести в начало координат за N шагов посредством выбора допустимого управления:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, N \in \mathbb{N}, \\ 0, N = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Как продемонстрировано в [4, лемма 1], в случае невырожденной матрицы системы множества 0-управляемости допускают следующее описание.

Лемма 1 ([4, лемма 1]). Пусть $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (3). Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(N) &= -\sum_{i=1}^N A^{-i} \mathcal{U}, \\ \mathcal{X}(N) &= A^{-1} \mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1} \mathcal{U}). \end{aligned}$$



Согласно лемме 1 построение множеств 0-управляемости в случае (2) сводится к вычислению суммы по Минковскому линейных преобразований многогранника \mathcal{U} . Согласно [10] верхняя оценка множества вершин многогранника $\mathcal{X}(N)$ может быть получена явно:

$$\text{Ext } \mathcal{X}(N) \subset \left\{ \sum_{i=1}^N A^{-i} u^{j_i}, j_1, \dots, j_N = \overline{1, M} \right\}, N \in \mathbb{N}. \# 4 \quad (4)$$

Однако использование оценки (4) зачастую неприемлемо для описания множества, так как число ее элементов растет экспоненциально в зависимости от номера шага N :

$$\text{card} \left\{ \sum_{i=1}^N A^{-i} u^{j_i}, j_1, \dots, j_N = \overline{1, M} \right\} = M^N, N \in \mathbb{N}.$$

В общем случае для построения точного описания $\text{Ext } \mathcal{X}(N)$ к оценке (4) применяются соответствующие алгоритмы, например, алгоритм быстрой оболочки [12]. Явное выражение для вычисления $\text{card } \text{Ext } \mathcal{X}(N)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$ неизвестно, как правило, используются экспоненциальные оценки [22, теорема 4.1.2].

Тем не менее, даже в случае построения точного множества вершин $\text{Ext } \mathcal{X}(N)$ сложность его описания может быть неприемлемой с точки зрения решения последующих оптимизационных задач. По этой причине оказывается актуальной задача построения внутренней полиэдральной аппроксимации $\hat{\mathcal{X}}(N)$ множества $\mathcal{X}(N)$, обладающей наиболее простым описанием при сохранении заданного порядка точности. В качестве критерия точности описания рассматривается расстояние Хаусдорфа [7, 10].

Формально данная задача может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{card } \text{Ext } \hat{\mathcal{X}}(N) &\rightarrow \min \\ \rho_H(\hat{\mathcal{X}}(N), \mathcal{X}(N)) &\leq \varepsilon, \\ \text{Ext } \hat{\mathcal{X}}(N) &\subset \text{Ext } \mathcal{X}(N) \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon > 0$ – заданная допустимая погрешность аппроксимации, через $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ обозначено расстояние Хаусдорфа между компактными множествами $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\}.$$

3. РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА МЕЖДУ МНОГОГРАННИКАМИ

Как следует из постановки, для решения задачи (5) необходимо вычислить расстояние Хаусдорфа $\rho_H(\hat{\mathcal{X}}(N), \mathcal{X}(N))$. При этом в случае (2) множества $\hat{\mathcal{X}}(N)$ и



$\mathcal{X}(N)$ представляют собой вложенные многогранники. Сведем задачу вычисления расстояния Хаусдорфа между вложенными многогранниками к задаче квадратичного программирования.

Везде далее в разделе 3 будем полагать, что

$$\mathcal{X} = \text{conv} \{x^1, \dots, x^N\}, \text{Ext } \mathcal{X} = \{x^1, \dots, x^N\},$$

$$\mathcal{Y} = \text{conv} \{y^1, \dots, y^M\}, \text{Ext } \mathcal{Y} = \{y^1, \dots, y^M\}.$$

Лемма 2. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. Тогда

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| = \sup_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|.$$

Доказательство. Поскольку для каждого $x \in \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ верно

$$\inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\| \leq \|x - x\| = 0,$$

то

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\| = 0.$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть функция $d_{\mathcal{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определяется соотношением

$$d_{\mathcal{X}}(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|.$$

Тогда $d_{\mathcal{X}}$ – выпуклая на \mathbb{R}^n функция.

Доказательство. Пусть для произвольного $y \in \mathbb{R}^n$

$$x^*(y) = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\|.$$

Выберем произвольные $y', y'' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0; 1]$ В силу выпуклости \mathcal{X} верно включение

$$\lambda x^*(y') + (1 - \lambda)x^*(y'') \in \mathcal{X}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{X}}(\lambda y' + (1 - \lambda)y'') &= \inf_{x \in \mathcal{X}} \|\lambda x^*(y') + (1 - \lambda)x^*(y'') - \lambda y' - (1 - \lambda)y''\| \leq \\ &\leq \|\lambda x^*(y') + (1 - \lambda)x^*(y'') - \lambda y' - (1 - \lambda)y''\| \leq \\ &\leq \lambda \|x^*(y') - y'\| + (1 - \lambda)\|x^*(y'') - y''\| = \lambda d_{\mathcal{X}}(y') + (1 - \lambda)d_{\mathcal{X}}(y''). \end{aligned}$$



Теорема 1. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. Тогда

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max_{j=1, M} \inf_{x \in \mathcal{X}} x - y^j.$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} x - y = \sup_{y \in \mathcal{Y}} d_{\mathcal{X}}(y).$$

Так как в силу леммы 3 $d_{\mathcal{X}}$ выпукла и определена на \mathbb{R}^n , то согласно [10, Следствие 32.3.4] $d_{\mathcal{X}}$ достигает своего максимума на выпуклом компактном множестве \mathcal{Y} в одной из его крайних точек:

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} d_{\mathcal{X}}(y) = \sup_{y \in \text{Ext } \mathcal{Y}} d_{\mathcal{X}}(y) = \max_{j=1, M} d_{\mathcal{X}}(y^j) = \max_{j=1, M} \inf_{x \in \mathcal{X}} x - y^j.$$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}, X = (x^1 \dots x^N) \in \mathbb{R}^{n \times N}, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T \in \mathbb{R}^N$. Тогда

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sqrt{\max_{j=1, M} \left(\|y^j\|^2 + \min_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 \\ \lambda_i \geq 0, i=1, N}} (\lambda^T X^T X \lambda - 2\lambda^T X^T y^j) \right)}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\begin{aligned} \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= \max_{j=1, M} \inf_{x \in \mathcal{X}} x - y^j = \sqrt{\max_{j=1, M} \inf_{x \in \mathcal{X}} x - y^j{}^2} = \\ &= \sqrt{\max_{j=1, M} \min_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 \\ \lambda_i \geq 0, i=1, N}} \left\| \sum_{i=1}^N \lambda_i x^i - y^j \right\|^2} = \sqrt{\max_{j=1, M} \min_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 \\ \lambda_i \geq 0, i=1, N}} \|X\lambda - y^j\|^2} = \\ &= \sqrt{\max_{j=1, M} \min_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 \\ \lambda_i \geq 0, i=1, N}} (X\lambda - y^j)^T (X\lambda - y^j)}, \end{aligned}$$

что эквивалентно утверждению следствия 1.

Согласно теореме 1 и следствию 1 вычисление расстояния Хаусдорфа между двумя вложенными многогранниками сводится к решению M задач квадратичного программирования с N неотрицательными переменными и одним ограничением вида равенство, M и N – число вершин большего и меньшего по включению многогранников соответственно.



4. АЛГОРИТМЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОГРАННИКА

Очевидный способ решения задачи (5) заключается в полном переборе всех возможных подмножеств $\text{Ext } \mathcal{X}(N)$. Данный подход позволяет вычислить точное решение поставленной задачи с экспоненциальной временной сложностью, что для множеств $\mathcal{X}(N)$ с большим числом вершин неприемлемо в силу значительных вычислительных затрат. В разделе 4 рассмотрим два эвристических алгоритма, обладающих полиномиальной временной сложностью, которые позволяют строить множество $\hat{\mathcal{X}}(N)$ достаточно близкое к оптимальному.

Везде далее в разделе 4 будем полагать, что $0 \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ и верно представление

$$\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^N\}, \text{Ext } \mathcal{X} = \{x^1, \dots, x^N\}$$

Введём обозначения для произвольного $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, N\}$:

$$\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}) = \begin{cases} \text{conv}\{x^i : i \in \mathcal{I}\}, & \mathcal{I} \neq \emptyset, \\ 0, & \mathcal{I} = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда задача (5) может быть преобразована в эквивалентный вид:

$$\text{card } \mathcal{I} \rightarrow \min_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1, \dots, N\}, \\ \varepsilon(\mathcal{I}) \leq \varepsilon}} \quad (6)$$

Будем называть набор индексов $\mathcal{J}^* \subset \{1, \dots, N\}$: оптимальным, если он является точкой минимума задачи (6). Сложность решения задачи (6) заключается в том, что оптимальный набор индексов, вообще говоря, может быть не единственным.

Пример 1. Пусть $\mathcal{X} = \text{conv}\{x^i = (\cos \frac{2\pi i}{N}, \sin \frac{2\pi i}{N})^T : i = \overline{1, N}\} \subset \mathbb{R}^2$, $N > 2$. Рассмотрим в качестве ε расстояние от вершины \mathcal{X} до отрезка, соединяющего две смежные вершины:

$$\varepsilon = \rho(x^i, \text{conv}\{x^{i-1}, x^{i+1}\}) = \inf_{x \in \text{conv}\{x^{i-1}, x^{i+1}\}} x^i - x, i = \overline{1, N}.$$

Здесь предполагается, что $x^0 = x^N$.

Поскольку \mathcal{X} представляет собой правильный многогранник, вписанный в окружность радиуса 1, то для всех $i = \overline{1, N}$

$$\varepsilon = \inf_{x \in \text{conv}\{x^{i-1}, x^{i+1}\}} x^i - x = x^i - \frac{x^{i+1} + x^{i-1}}{2} =$$



$$= \left(\left(\cos \frac{2\pi i}{N} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi(i+1)}{N} \right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi i}{N} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi(i+1)}{N} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \cos \frac{2\pi}{N}.$$

Положим $N = 8$. Тогда для любого $\mathcal{J} \subset \{1, \dots, 8\}$, $\text{card } \mathcal{J} = 3$ верно неравенство $\varepsilon(\mathcal{J}) > \varepsilon$. При этом $\varepsilon(\{1, 3, 5, 7\}) = \varepsilon(\{2, 4, 6, 8\}) = 1 - \cos \frac{2\pi}{N} = \varepsilon$. Откуда следует оптимальность наборов $\{1, 3, 5, 7\}$ и $\{2, 4, 6, 8\}$.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \{1, \dots, N\}$. Тогда $\varepsilon(\mathcal{J}_1) \geq \varepsilon(\mathcal{J}_2)$.

Доказательство. Доказательство леммы 4 следует непосредственно из определения расстояния Хаусдорфа и включения $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_1) \subset \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_2) \subset \mathcal{X}$.

Допустимым набором индексов $\mathcal{J}' \subset \{1, \dots, N\}$ будем называть такой набор индексов, что выполнены следующие два условия:

1. $\varepsilon(\mathcal{J}') \leq \varepsilon$;
2. $\varepsilon(\mathcal{J}') > \varepsilon$, для всех $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}', \mathcal{J} \neq \mathcal{J}'$.

Из определения следует, что любой оптимальный набор индексов \mathcal{J}^* также является допустимым. Построение оптимального набора \mathcal{J}^* в общем случае затруднительно и сводится к полному перебору. Приведем два алгоритма, нацеленных на построение допустимых наборов индексов, которые могут служить оценкой оптимальных наборов.

Алгоритм 1.

1. Положить $\mathcal{J}'_N = \{1, \dots, N\}$ и $k = N$.
2. Если $k = 0$, то завершить алгоритм.
3. На основе следствия 1 вычислить

$$j_k = \arg \min_{j \in \mathcal{J}'_k} \varepsilon(\mathcal{J}'_k \setminus \{j\}) = \arg \min_{j \in \mathcal{J}'_k} \rho_H(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}'_k \setminus \{j\})).$$

4. Если $\varepsilon(\mathcal{J}'_k \setminus \{j_k\}) > \varepsilon$, то завершить алгоритм.
5. Иначе положить $\mathcal{J}'_{k-1} = \mathcal{J}'_k \setminus \{j_k\}$, уменьшить k на 1 и перейти к шагу 2.

Алгоритм 2.

Положить $\mathcal{J}''_0 = \emptyset$ и $k = 0$.

На основе следствия 1 вычислить $\varepsilon(\mathcal{J}''_k)$. Если $\varepsilon(\mathcal{J}''_k) \leq \varepsilon$, то положить $\mathcal{J}'_k = \mathcal{J}''_k$ и перейти к шагу 2 алгоритма 1.

1. Исходя из расчетов, проведенных в пункте 2, вычислить

$$i_k = \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{I}'_k} \left(\inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{I}'_k)} x - x^i \right).$$

Положить $\mathcal{J}''_{k+1} = \mathcal{J}''_k \cup \{i_k\}$, увеличить k на 1 и перейти к шагу 2.

Обозначим через k^* значение индекса k , на котором завершаются алгоритмы 1 и

2. Согласно определению алгоритм 1 возвращает в ходе работы допустимый набор

индексов \mathcal{J}_{k^*}' . При этом величина $N - k^*$ является числом итераций алгоритма 1, а k^* является числом вершин аппроксимирующего многогранника:

$$k^* = \text{card Ext } \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_{k^*}').$$

С учетом того, что алгоритм 2 завершается вызовом алгоритма 1, то полученный в результате набор индексов \mathcal{J}_{k^*}' также будет допустимым. При этом для алгоритма 2 переход в пункте 2 к алгоритму 1 является существенным, так как без данного перехода окончательный набор индексов может оказаться недопустимым. Для демонстрации данного факта рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Пусть $y = (0.9, 0)^T$, рассмотрим следующий набор точек $\{x^i\}_{i=1}^6 \subset \mathbb{R}^2$:

$$x^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - y, x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - y, x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - y,$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - y, x^5 = \begin{pmatrix} \cos \frac{7\pi}{8} \\ \sin \frac{7\pi}{8} \end{pmatrix} - y, x^6 = \begin{pmatrix} \cos \frac{7\pi}{8} \\ -\sin \frac{7\pi}{8} \end{pmatrix} - y.$$

Пусть $\mathcal{X} = \text{conv}\{x^1, \dots, x^6\}$. Тогда также верно, что $\text{Ext } \mathcal{X} = \{x^1, \dots, x^6\}, 0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Выберем $\varepsilon=0.1$ и применим алгоритм 2 к многограннику \mathcal{X} .

Получим следующие результаты, проиллюстрированные на рисунке 1:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0'' &= \emptyset, i_0 = 1, \inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_0'')} \|x - x^{i_0}\| = 1.9, \varepsilon(\mathcal{J}_0'' \cup \{i_0\}) = 2, \\ \mathcal{J}_1'' &= \{1\}, i_1 = 2, \inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_1'')} \|x - x^{i_1}\| = 2, \varepsilon(\mathcal{J}_1'' \cup \{i_1\}) = 1, \\ \mathcal{J}_2'' &= \{1, 2\}, i_2 = 3, \inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_2'')} \|x - x^{i_2}\| = 1, \varepsilon(\mathcal{J}_2'' \cup \{i_2\}) = 1, \\ \mathcal{J}_3'' &= \{1, 2, 3\}, i_3 = 4, \inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_3'')} \|x - x^{i_3}\| = 1, \\ \varepsilon(\mathcal{J}_3'' \cup \{i_3\}) &= \frac{\sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0.2168, \\ \mathcal{J}_4'' &= \{1, 2, 3, 4\}, i_4 = 5, \inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_4'')} \|x - x^{i_4}\| = \frac{\sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0.2168, \\ \varepsilon(\mathcal{J}_4'' \cup \{i_4\}) &= \frac{\sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0.2168, \\ \mathcal{J}_5'' &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, i_5 = 6, \inf_{x \in \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}_5'')} \|x - x^{i_5}\| = \frac{\sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} - 1}{\sqrt{2}} \approx 0.2168, \\ \varepsilon(\mathcal{J}_5'' \cup \{i_5\}) &= 0, \mathcal{J}_6'' = \{1, \dots, 6\}. \end{aligned}$$



Построенный набор \mathcal{J}_6'' не является допустимым, так как

$$\{2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathcal{J}_6'', \varepsilon(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = 1 + \cos \frac{7\pi}{8} \approx 0.0761 < \varepsilon.$$

Замечание 1. Алгоритм 2 представляет собой модификацию алгоритма уточнения оценок, рассмотренного в [5, Гл. 4 раздел 4.1]. Отличие заключается в исходном описании многогранника \mathcal{X} : в данной работе многогранник рассматривается как выпуклая оболочка конечного числа вершин, в то время как в [5] используется описание многогранников через систему линейных неравенств. Также в общем случае алгоритм уточнения оценок используется для полиэдральной аппроксимации произвольного выпуклого компакта и не предполагает сходимости за конечное число итераций.

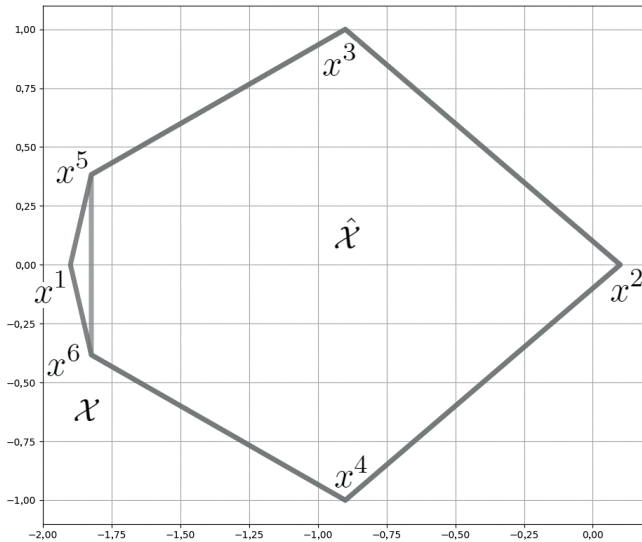


Рис. 1. Аппроксимация $\hat{\mathcal{X}}$ двумерного многогранника \mathcal{X} на основе алгоритма 2, рассмотренного в примере 2.

Вычислительная сложность алгоритмов 1 и 2 сводится к числу решаемых задач квадратичного программирования вида

$$\begin{aligned} \lambda^T X^T X \lambda - 2\lambda^T X^T y &\rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i &= 1, \\ \lambda_i &\geq 0, i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (7)$$

к которым сводится вычисление величины $\varepsilon(\mathcal{J})$ согласно следствию 1 и теореме 1. Обозначим через $QP(N)$ временную сложность решения задачи (7). Поскольку

матрица Гессе $2X^T X$ критериальной функции является симметрической и положительно определенной, то согласно [6] задача (7) может быть решена за полиномиальное время, например, методом эллипсоидов. Сложность алгоритмов 1 и 2 определим в терминах функции $QP(N)$.

Теорема 2. Пусть k^* – значение индекса k , при котором завершится алгоритм 1 для многогранника \mathcal{X} и заданного $\varepsilon > 0$.

Тогда применение алгоритма 1 потребует решение следующего числа задач вида (7) сложности не более $QP(N-1)$:

$$C_1(N) = \frac{(N+2k^*)(N-k^*+2)(N-k^*+1)}{6} \leq \frac{N(N+1)(N+2)}{6}. \quad (8)$$

Доказательство. Для каждого $k = \overline{k^*, N}$ на шаге 3 происходит перебор по $\text{card } \mathcal{J}'_k = k$ числу различных индексов для вычисления j_k . При этом для каждого $j \in \mathcal{I}'_k$ происходит вычисление величины $\rho_H(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}'_k \setminus \{j\}))$, что согласно следствию 1 сводится к проектированию $\text{card}(\{1, \dots, N\} \setminus (\mathcal{J}'_k \setminus \{j\})) = N - k + 1$ различных точек на многогранник $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}'_k \setminus \{j\})$ с $k-1$ вершиной. Таким образом на k -м шаге алгоритма 1 решается $k(N-k+1)$ задач квадратичного программирования сложности $QP(k-1)$.

Тогда

$$C_1(N) = \sum_{k=k^*}^N k(N-k+1) = \frac{(N+2k^*)(N-k^*+2)(N-k^*+1)}{6}.$$

Наихудший в смысле сложности случай получается при $k^* = 0$. Однако с учетом шага 2 алгоритма 1 вычисления при данном значении индекса k не проводятся, то есть наибольшее число решенных задач вида (7) определяется значением $k^* = 1$:

$$C_1(N) \leq \frac{(N+2 \cdot 1)(N-1+2)(N-1+1)}{6} = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}.$$

Теорема 3. Пусть k^{**} – значение индекса k , при котором в алгоритме 2 происходит переход к шагу 2 алгоритма 1 для многогранника \mathcal{X} и заданного $\varepsilon > 0$, k^* – значение индекса k , при котором завершится вызванный алгоритм 1.

Тогда применение алгоритма 2 потребует решение следующего числа задач вида (7) сложности не более $QP(k^{**})$:

$$C_2(N) = \frac{N(k^{**}+1)(k^{**}+2)}{2} - \frac{k^{**}(2k^{**2}+3k^{**}+1)}{6} - \frac{Nk^*(k^*-1)}{2} + \frac{k^*(k^{*2}-3k^*+2)}{3} \leq \frac{N(N+1)(N+5)}{6}.$$



Доказательство. Для каждого $k = 0, k^{**}$ на шагах 2 и 3 происходит перебор по $\text{card}(\{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{J}'_k) = N - k$ числу различных индексов для вычисления i_k . При этом для каждого $i \in \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{J}'_k$ происходит проектирование вершины x^i на многогранник $\hat{\mathcal{X}}(\mathcal{J}'_k)$ с k вершинами. Таким образом на k -м шаге алгоритма 1 решается $(N - k)$ задач квадратичного программирования сложности $QP(k)$. В алгоритме 1 индекс k меняется от k^{**} до k^* , что аналогично соотношению (8) приводит к следующему результату:

$$C_2(N) = \sum_{k=0}^{k^{**}} (N - k) + \sum_{k=k^*}^{k^{**}} k(N - k + 1) = \\ = \frac{N(k^{**} + 1)(k^{**} + 2)}{2} - \frac{k^{**}(2k^{**2} + 3k^{**} + 1)}{6} - \frac{Nk^*(k^* - 1)}{2} + \frac{k^*(k^{*2} - 3k^* + 2)}{3}.$$

Наихудший в смысле сложности случай получается при $k^* = 0$ и $k^{**} = N$.

$$C_2(N) \leq \frac{N(N + 1)(N + 5)}{6}.$$

Следствие 2. Алгоритмы 1 и 2 принадлежат классу сложности \mathbb{P} , то есть имеют полиномиальную сложность по N .

Доказательство. Из теорем 2 и 3 следует, что временная сложность алгоритмов 1 и 2 составляет $\mathcal{O}(N^3 QP(N - 1))$. При этом согласно [6] $QP(N - 1)$ – полиномиальная функция. Отсюда следует полиномиальность алгоритмов 1 и 2.

Замечание 2. Алгоритм 2 имеет в худшем случае большую сложность, чем алгоритм 1, что связано вызовом алгоритма 1 на шаге 2 алгоритма 2. Однако в предположении, что полиэдральная аппроксимация исходного многогранника \mathcal{X} целесообразна, величина k^{**} ожидается значительно меньше N , а величина $k^{**} - k^*$ оценивается близкой к 0. При этом сложность решаемых задач вида (7) будет ограничена сверху $QP(k^{**})$, что сделает сложность алгоритма 2 ниже сложности алгоритма 1. Напротив, если число k^* предполагается достаточно большим, то алгоритм 1 потребует меньшего числа итераций и расчетов, чем алгоритм 2.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Продемонстрируем эффективность алгоритмов 1 и 2 на примере полиэдральной аппроксимации различных многогранников.

Пример 3. Рассмотрим следующий многогранник $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{X} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -1.5 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ -3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1.75 \end{array} \right) \right\}.$$

Пример работы алгоритмов 1 и 2 для $\varepsilon=0.32$ представлен на рисунке 2, где через x^1, x^2, x^3 обозначены вершины \mathcal{X} , исключенные алгоритмом 1 в порядке их исключения, через y^1, y^2, y^3, y^4 обозначены вершины $\hat{\mathcal{X}}$, добавленные алгоритмом 2 в порядке их добавления.

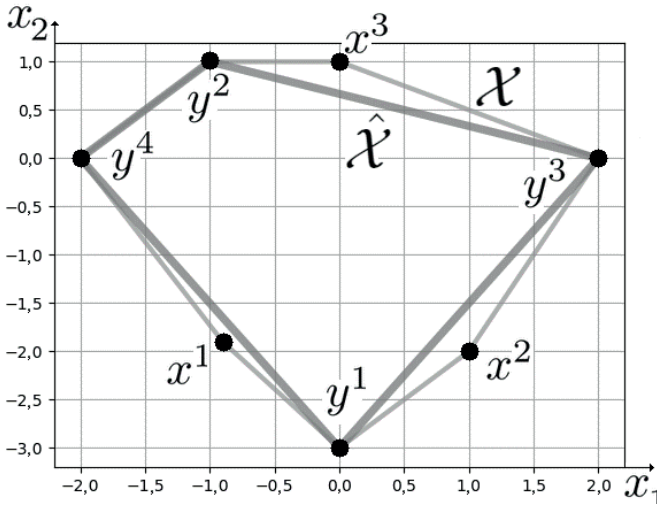


Рис. 2. Результаты примера 3

Можно заметить, что оба алгоритма построили единственный оптимальный набор индексов.

Также проведем сопоставление результатов данной статьи с теоретической оценкой оптимальной погрешности при приближении произвольных выпуклых тел многогранниками, полученной в [23]. Для различных двумерных многогранников, сгенерированных случайным образом, представим результаты работы алгоритмов 1 и 2 в таблице 1.

Таблица 1

card Ext \mathcal{X}	120	109	100	100	94	90	80	65	22	17
$\varepsilon / \text{diam } \mathcal{X}$	0.05	0.02	0.02	0.02	0.02	0.2	0.2	0.2	0.01	0.3
card Ext $\hat{\mathcal{X}}_1$	11	18	21	18	20	5	6	6	7	6
card Ext $\hat{\mathcal{X}}_2$	11	18	17	17	17	5	6	5	6	6

Можно заметить, что алгоритм 2 на тестовых примерах демонстрирует результаты не хуже, чем алгоритм 1. Также на рисунках 3, 4 представлены зависимости величин погрешности аппроксимации $\hat{a}(\mathcal{I}_k^n)$ в алгоритме 2 от числа включенных



в аппроксимацию вершин исходного многогранника k в сравнении с теоретической оценкой оптимальной погрешности [23]. Для достаточно точного описания множества требуется сравнительно небольшое число его вершин. При этом порядок погрешности соответствует оптимальному значению.

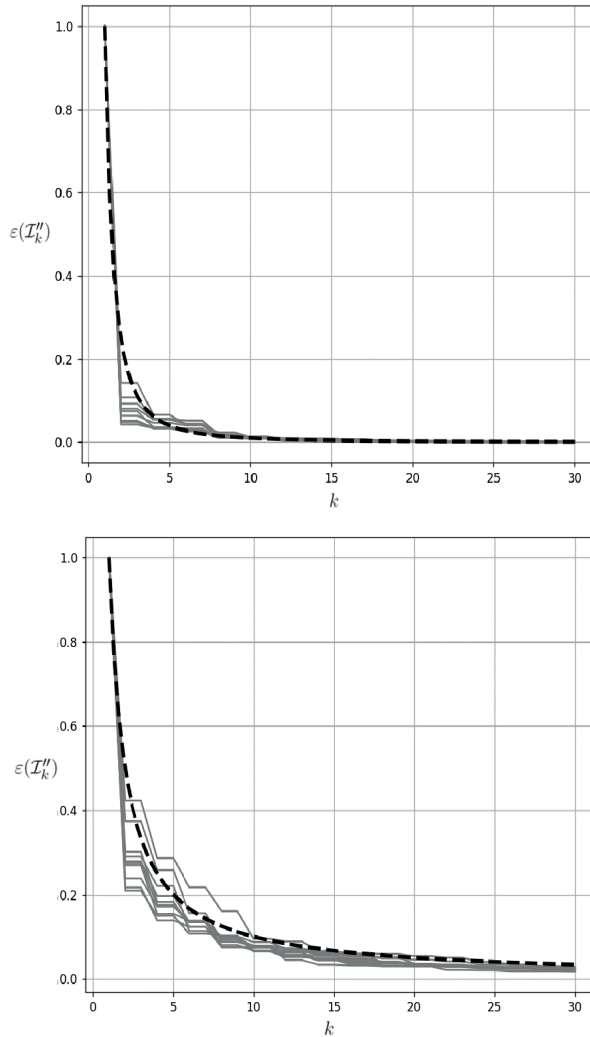


Рис. 3. Зависимость величины погрешности аппроксимации $\varepsilon(\mathcal{I}_k'')$ двухмерного многогранника в алгоритме 2 от числа включенных в аппроксимацию вершин k . Пунктирной линией обозначена теоретическая оценка оптимальной погрешности

6. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ

Алгоритмы 1 и 2 позволяют при допущениях (2) произвести аппроксимацию произвольного множества 0-управляемости системы (1). Однако в общем случае этого может быть недостаточно. Построение множеств 0-управляемости, как правило, производится рекуррентно в соответствии с леммой 1. При достаточно больших значениях $N \in \mathbb{N}$ этот процесс может оказаться чересчур трудозатратным с вычислительной точки зрения. В таком случае предлагается производить аппроксимацию многократно на различных шагах по мере того, как число вершин текущего многогранника становится неприемлемо большим.

Через $(\mathcal{X}, \varepsilon)$ обозначим результат аппроксимации многогранника $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, произведенный с точностью $\varepsilon > 0$. Т.е. $\text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon)$ определяется из условий

$$\rho_H(\text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon), \mathcal{X}) \leq \varepsilon, \text{Ext } \text{Approx}(\mathcal{X}, \varepsilon) \subset \text{Ext } \mathcal{X}.$$

Для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выберем $1 < N_1 < \dots < N_m$ – номера шагов, на которых производится аппроксимация множества 0-управляемости в соответствии с алгоритмами 1 или 2. Точность каждой аппроксимации при этом составляет $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ соответственно. Определим аппроксимирующую последовательность рекуррентно:

$$\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N) = \begin{cases} \mathcal{X}(N), & N < N_1, \\ \text{Approx}(\mathcal{X}(N_1), \varepsilon_1), & N = N_1, \\ \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}}(N), & N_1 < N < N_m, \\ \text{Approx}(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}}(N_m), \varepsilon_m), & N = N_m, \\ A^{-1} \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N-1) + (-A^{-1}U), & N > N_m. \end{cases} \quad (9)$$

При этом в ходе последовательной аппроксимации итоговая погрешность $\rho_H(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N), \mathcal{X}(N))$ может накапливаться. Рассмотрим задачу вычисления ее априорной оценки. Для этого в дальнейших рассуждениях под нормой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем понимать ее операторную норму:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Лемма 5. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ – компактные множества. Тогда

$$\rho_H(A\mathcal{X} + U, A\mathcal{Y} + U) \leq \|A\| \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Доказательство. Верны соотношения

$$\rho_H(A\mathcal{X} + U, A\mathcal{Y} + U) = \max \left\{ \sup_{\tilde{x} \in A\mathcal{X} + U} \inf_{\tilde{y} \in A\mathcal{Y} + U} \|\tilde{x} - \tilde{y}\|; \sup_{\tilde{y} \in A\mathcal{Y} + U} \inf_{\tilde{x} \in A\mathcal{X} + U} \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \right\} =$$



$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \left\| Ax + u^1 - Ay - u^2 \right\|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \left\| Ax + u^1 - Ay - u^2 \right\| \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \left\| A(x-y) \right\| + \left\| u^1 - u^2 \right\|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \left\| A(x-y) \right\| + \left\| u^1 - u^2 \right\| \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \left\| A(x-y) \right\|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \left\| A(x-y) \right\| \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \left\| A \right\| \left\| x-y \right\|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \left\| A \right\| \left\| x-y \right\| \right\} = \\
&= \left\| A \right\| \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \left\| x-y \right\|; \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \left\| x-y \right\| \right\} = \left\| A \right\| \rho_H(X, Y).
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ и $1 < N_1 < \dots < N_m$, для системы (1) верно, что $\det A \neq 0, \alpha = \left\| A^{-1} \right\|$. Тогда для любых $N \geq N_m$ верна оценка

$$\rho_H(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N), \mathcal{X}(N)) \leq \sum_{k=1}^m \alpha^{N-N_k} \varepsilon_k.$$

Доказательство. При $m=1$ лемма 6 следует непосредственно из лемм 1 и 5.

Пусть $m \geq 2$. Согласно лемме 1 для всех $k = \overline{2, m}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N_k) = A^{-(N_k - N_{k-1})} \mathcal{X}(N_{k-1}) + \mathcal{X}(N_k - N_{k-1}).$$

Также из (9) следует, что

$$\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{k-1}}(N_k) = A^{-(N_k - N_{k-1})} \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{k-1}}(N_{k-1}) + \mathcal{X}(N_k - N_{k-1}).$$

Тогда в силу леммы 5 справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\rho_H(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{k-1}}(N_k), \mathcal{X}(N_k)) &\leq \left\| A^{-(N_k - N_{k-1})} \right\| \rho_H(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{k-1}}(N_{k-1}), \mathcal{X}(N_{k-1})) \leq \\
&\leq \alpha^{N_k - N_{k-1}} \rho_H(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{k-1}}(N_{k-1}), \mathcal{X}(N_{k-1}))
\end{aligned}$$

Учтем неравенство треугольника и получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
&\rho_H(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N), \mathcal{X}(N)) = \\
&= \rho_H(A^{-(N - N_m)} \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m}(N_m) + \mathcal{X}(N - N_m), A^{-(N - N_m)} \mathcal{X}(N) + \mathcal{X}(N - N_m)) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left\| A^{-(N-N_m)} \right\| \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m} (N_m), \mathcal{X} (N_m) \right) \leq \alpha^{N-N_m} \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m} (N_m), \mathcal{X} (N_m) \right) \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \left(\rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m} (N_m), \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}} (N_m) \right) + \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}} (N_m), \mathcal{X} (N_m) \right) \right) \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \left(\varepsilon_m + \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}} (N_m), \mathcal{X} (N_m) \right) \right) \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \varepsilon_m + \alpha^{N-N_m} \alpha^{N-N_{m-1}} \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}} (N_{m-1}), \mathcal{X} (N_{m-1}) \right) \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \varepsilon_m + \alpha^{N-N_{m-1}} \left(\rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-1}} (N_{m-1}), \hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-2}} (N_{m-1}) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-2}} (N_{m-1}), \mathcal{X} (N_{m-1}) \right) \right) \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \varepsilon_m + \alpha^{N-N_{m-1}} \varepsilon_{m-1} + \alpha^{N-N_{m-1}} \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_{m-2}} (N_{m-1}), \mathcal{X} (N_{m-1}) \right) \leq \dots \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \varepsilon_m + \alpha^{N-N_{m-1}} \varepsilon_{m-1} + \dots + \alpha^{N-N_1} \rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1} (N_1), \mathcal{X} (N_1) \right) \leq \\
 &\leq \alpha^{N-N_m} \varepsilon_m + \alpha^{N-N_{m-1}} \varepsilon_{m-1} + \dots + \alpha^{N-N_1} \varepsilon_1 .
 \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

Следствие 3. Пусть в условиях леммы 6 верно, что $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_m = \varepsilon$. Тогда для любых $N \geq N_m$ верна оценка

$$\rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m} (N), \mathcal{X} (N) \right) \leq \alpha \varepsilon^N \sum_{k=1}^m \alpha^{-N_k} .$$

Доказательство. В силу леммы 6 верны соотношения

$$\rho_H \left(\hat{\mathcal{X}}_{N_1, \dots, N_m} (N), \mathcal{X} (N) \right) \leq \sum_{k=1}^m \alpha^{N-N_k} \varepsilon_k = \varepsilon \sum_{k=1}^m \alpha^{N-N_k} = \varepsilon \alpha^N \sum_{k=1}^m \alpha^{-N_k} .$$

Следствие 3 доказано.

Основными результатами леммы 6 и следствия 3 является тот факт, что для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ погрешность при последовательной аппроксимации составляет $\mathcal{O}(\alpha^N)$. При этом согласно леммам 1 и 5 справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 \rho_H(\mathcal{X}(N+1), \mathcal{X}(N)) &= \rho_H(A^{-1}\mathcal{X}(N) + (-A^{-1}\mathcal{U}), A^{-1}\mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1}\mathcal{U})) \leq \\
 &\leq \alpha \rho_H(\mathcal{X}(N), \mathcal{X}(N-1)) \leq \dots \leq \alpha^N \rho_H(\mathcal{X}(1), \{0\}) = \alpha^N \text{diam } \mathcal{X}(1).
 \end{aligned}$$

Т.е. $\rho_H(\mathcal{X}(N+1), \mathcal{X}(N)) = \mathcal{O}(\alpha^N)$.

Таким образом порядок погрешности аппроксимации на шаге N совпадает с порядком увеличения размера множества 0-управляемости при переходе на шаг $N+1$.

Это гарантирует, что если требуется для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определить наименьшее $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее включению $x_0 \in \mathcal{X}(N)$, то погрешность при использовании аппроксимирующей последовательности (9) может быть ограничена сверху



некоторой константой. Разрешение подобного условия представляет интерес, например, при решении задачи быстрогодействия [3, 4].

7. АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА

Проведем численное моделирование множеств 0-управляемости системы управления движением спутника, расположенного в окрестности круговой орбиты. Предполагается, что коррекция движения осуществляется посредством двигателей импульсной тяги, корректирующие импульсы исполняются без ошибок через равные промежутки времени $\Delta t > 0$. Свободное движение спутника описывается системой дифференциальных уравнений [8]:

где r – расстояние от начала координат до спутника, θ – угол поворота в полярной

$$\begin{aligned}\dot{r} &= v_R, \\ \dot{\theta} &= \frac{v_T}{r}, \\ \dot{v}_R &= \frac{v_R^2}{r} - \frac{1}{r^2}, \\ \dot{v}_T &= -\frac{v_R v_T}{r},\end{aligned}$$

системе координат, v_R и v_T – радиальная и трансверсальная составляющие скорости спутника, рассматриваемого как материальная точка.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r - r_0, \\ \xi_2 &= v_R - v_{R0}, \\ \xi_3 &= v_T - v_{T0}, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 + 2\xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= -\xi_2.\end{aligned}\tag{10}$$

Круговая орбита описывается значениями переменных r_0, v_{R0}, v_{T0} . При рассмотрении задачи коррекции – перевода траектории движения спутника на круговую орбиту – значение переменной θ не представляет интереса, что позволяет перейти к линеаризованной трехмерной системе, записанной относительно малых отклонений от параметров круговой орбиты [8]:

Предположение об импульсном характере управления позволяет перейти от рассмотрения непрерывной траектории $\xi(t)$ к ее значениям в моменты времени $k\Delta t$, непосредственно предшествующие k -й коррекции:

$$x(k) = \xi(k \Delta t), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тогда на основе построения аналитического решения системы линейных дифференциальных уравнений (10) можно перейти к рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)\left(x(k) + (0, v_1(k), v_2(k))^T\right), \\x(0) &= x_0, v_1(k), v_2(k) \in [-\alpha_{\max}; \alpha_{\max}], k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\end{aligned}$$

где $v_1(k), v_2(k)$ – корректирующие импульсы, направленные вдоль радиальной и тангенциальной составляющих вектора скорости соответственно, $\alpha_{\max} > 0$ – величина, ограничивающая максимальную тягу импульсного двигателя, $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ – матрица фундаментальной системы решений системы (10):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t & -2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & \sin t & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\begin{aligned}A &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\cos(\Delta t) + 2 & \sin(\Delta t) & -2\cos(\Delta t) + 2 \\ \sin(\Delta t) & \cos(\Delta t) & 2\sin(\Delta t) \\ \cos(\Delta t) - 1 & -\sin(\Delta t) & 2\cos(\Delta t) - 1 \end{pmatrix}, \\u &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [-\alpha_{\max}; \alpha_{\max}]^2 = \\&= \alpha_{\max} \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \sin(\Delta t) - 2\cos(\Delta t) + 2 \\ \cos(\Delta t) + 2\sin(\Delta t) \\ -\sin(\Delta t) + 2\cos(\Delta t) - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\Delta t) + 2\cos(\Delta t) - 2 \\ -\cos(\Delta t) - 2\sin(\Delta t) \\ \sin(\Delta t) - 2\cos(\Delta t) + 1 \end{pmatrix}, \right. \\&\quad \left. \begin{pmatrix} \sin(\Delta t) + 2\cos(\Delta t) - 2 \\ \cos(\Delta t) - 2\sin(\Delta t) \\ -\sin(\Delta t) - 2\cos(\Delta t) + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\Delta t) - 2\cos(\Delta t) + 2 \\ -\cos(\Delta t) + 2\sin(\Delta t) \\ \sin(\Delta t) + 2\cos(\Delta t) - 1 \end{pmatrix} \right\}, \\u(k) &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0) + (0, v_1(k), v_2(k))^T.\end{aligned}$$

Тогда дискретные соотношения (11) примут эквивалентный вид (1), что позволяет провести численное моделирование множеств 0-управляемости системы управления движением спутника на основе леммы 1. Без ограничения общности можно положить $\alpha_{\max} = 1$, как множество допустимых значений управлений \mathcal{U} и множества 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ пропорциональны величине α_{\max} . Примем $\Delta t = 0.25$.

Поскольку $M = \text{card Ext } \mathcal{U} = 4$, для любого $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множество 0-управляемости $\mathcal{X}(N)$ представляет собой многогранник с числом вершин, не превосходящим 4^N . Точное значение числа вершин, определенное при помощи алгоритма быстрой оболочки [12], для $N = \overline{1, 7}$ представлено в таблице 2, множество $\mathcal{X}(7)$ изображено на рисунке 4.



Таблица 2

N	1	2	3	4	5	6	7
card Ext $\mathcal{X}(N)$	4	14	32	58	92	134	184

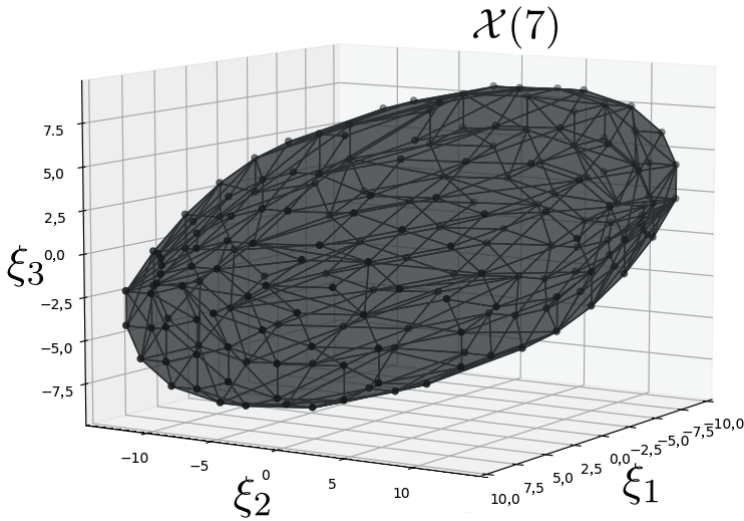


Рис. 4. Множество 0-управляемости за 7 шагов $\mathcal{X}(7)$ дискретной системы управления движением спутника, расположенного на околокруговой орбите.

Проведем аппроксимацию множества $\mathcal{X}(7)$. Выберем $\dot{a} = 0.05 \cdot \text{diam } \mathcal{X}(7) = 1.638$. Внутренние оценки $\hat{\mathcal{X}}_1(7)$ и $\hat{\mathcal{X}}_2(7)$, полученные при помощи алгоритмов 1 и 2 соответственно, имеют следующий вид:

$$\hat{\mathcal{X}}_1(7) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -7.7337 \\ 7.2044 \\ 0.7337 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8.5733 \\ -9.9901 \\ -7.5733 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5.1665 \\ 0.0402 \\ -8.1665 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.2481 \\ 9.5813 \\ -4.7519 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -9.1873 \\ 12.8974 \\ 2.1873 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7.7337 \\ -7.2044 \\ -0.7337 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8.5733 \\ 9.9901 \\ 7.5733 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5.1665 \\ -0.0402 \\ 8.1665 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.2481 \\ -9.5813 \\ 4.7519 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9.1873 \\ -12.8974 \\ -2.1873 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\hat{\mathcal{X}}_2(7) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 9.1873 \\ -12.8974 \\ -4.1873 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.4278 \\ -3.8361 \\ 7.4278 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7.5001 \\ 7.2635 \\ 8.5001 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.6114 \\ -11.0447 \\ 3.3886 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (-6.3704) \\ 5.7410 \\ -0.6296 \end{matrix}, \begin{matrix} (-9.1873) \\ 12.8974 \\ 4.1873 \end{matrix}, \begin{matrix} (2.4278) \\ 3.8361 \\ -7.4278 \end{matrix}, \begin{matrix} (7.5001) \\ -7.2635 \\ -8.5001 \end{matrix}, \begin{matrix} (-3.6114) \\ 11.0447 \\ -3.3886 \end{matrix}, \begin{matrix} (6.3704) \\ -5.7410 \\ 0.6296 \end{matrix} \right\}.$$

Графически множества $\hat{\mathcal{X}}_1(7)$ и $\hat{\mathcal{X}}_2(7)$ представлены на рисунках 5 и 6.

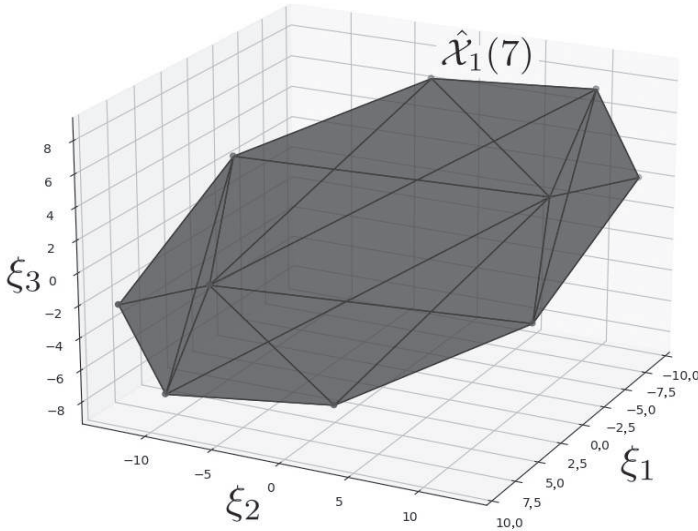


Рис. 5. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_1(7)$, построенная на основе алгоритма 1

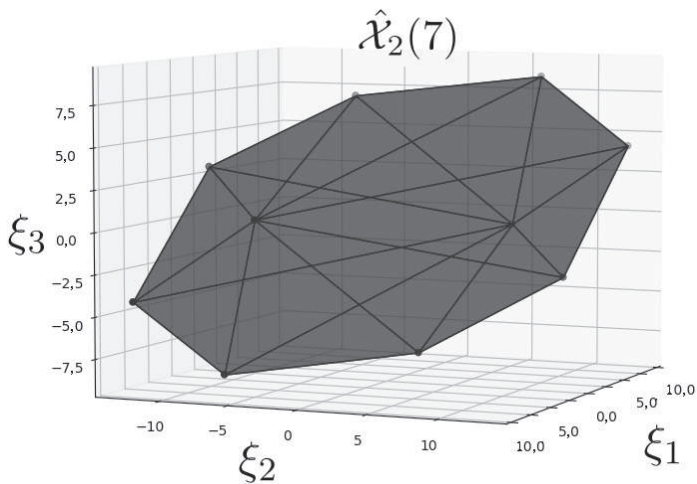


Рис. 6. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_2(7)$, построенная на основе алгоритма 2



8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены два алгоритма, позволяющих снизить описательную сложность данных множеств на основе проведения полиэдральной аппроксимации. Особенностью данных алгоритмов является то, что они гарантируют заданную точность аппроксимации в смысле расстояния Хаусдорфа. При этом полученные оценки являются субоптимальными, то есть не допускают дальнейшего упрощения при сохранении текущей точности.

В виде теоремы 1 и следствия 1 доказано, что вычисление расстояния Хаусдорфа между вложенными многогранниками сводится к решению ряда задач квадратичного программирования с неотрицательно определенной матрицей квадратичной формы. В виде теорем 2 и 3 сформулированы оценки сложности разработанных алгоритмов. В форме следствия 2 доказано, что данные алгоритмы обладают полиномиальной временной сложностью.

Проведены численные эксперименты работы алгоритмов для двумерных многогранников. На основе полученных результатов проведена аппроксимация множества 0-управляемости системы управления движением спутника, расположенного в окрестности круговой орбиты.

Разработанные алгоритмы могут быть использованы при анализе различных линейных дискретных моделей на предмет управляемости и достижимости. Также в силу полиномиальной временной сложности при помощи их можно проводить численное моделирование областей достижимости различных дискретных объектов.

Литература

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит. 2005. 391 с.
2. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука. 1973. 448 с.
3. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю.* О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстрогодействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2021. № 12. С. 48–72. DOI: 10.31857/S0005231021120047
4. *Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu.* On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. DOI: 10.1134/S000511792112002X
5. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ*. 2017. № 10. С. 3–32. DOI: 10.1134/S0005117917100010
6. *Ibragimov D.N., Sirotin A.N.* On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756. DOI: 10.1134/S0005117917100010
7. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН. 2010. 119 с.
8. *Козлов М.К., Тарасов С.П., Хачиян Л.Г.* Полиномиальная разрешимость выпуклого квадратичного программирования // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1980. Т. 20. № 5. С. 1319–1323.

9. Kozlov M.K., Tarasov S.P., Khachiyan L.G. The polynomial solvability of convex quadratic programming // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. Vol. 20. No. 5. P. 223–228. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90098-1.
10. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет. 2000. 352 с.
11. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т., Нестеренко О.П., Федоров А.В. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез и управление. М.: МАИ. 2000. 568 с.
12. Проной А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука. 1973. 256 с.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973. 471 с.
14. Сиротин А.Н. Управляемость линейных дискретных систем с ограниченным управлением и (почти) периодическими возмущениями // АиТ. 2001. № 5. С. 53–64.
15. Sirotin A.N. Controllability of linear discrete systems with bounded control and (almost) periodic disturbances // Autom. Remote Control. 2001. Vol. 62. No. 5. P. 724–734. DOI: 10.1023/A:1010266622197.
16. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. Vol. 4. No. 22. P. 469–483. DOI: 10.1145/235815.235821.
17. Benvenuti L., Farina L. The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2006. Vol. 28. No. 2. P. 306–325. DOI: 10.1137/040612531.
18. Colonius F., Cossich J.A.N., Santana A.J. Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2022. Vol. 34. P. 5–22. DOI: 10.1007/s10884-021-09966-4.
19. Darup M.S., Mönnigmann M. On general relations between null-controllable and controlled invariant sets for linear constrained systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328. DOI: 10.1109/CDC.2014.7040380.
20. Fucheng L., Mengyuan S., Usman Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // Mathematical Problems in Engineering. 2019. P. 1–11. DOI: 10.1155/2019/8434293.
21. Ge S.S., Zhendong S., Lee T.H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46. No. 9. P. 1437–1441. DOI: 10.1109/9.948473.
22. Heemels W.P.M.H., Camlibel M.K. Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun. 2008. P. 3487–3492. DOI: 10.1109/CDC.2008.4739333.
23. Kaba M.D., Camlibel M.K. A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 2015. Vol. 53. No. 4. P. 2350–2372. DOI: 10.1137/140960967.
24. Kostousova E.K. External polyhedral estimates of reachable sets of discrete-time systems with integral bounds on additive terms // Mathematical Control and Related Fields. 2021. Vol. 11. No. 3. P. 625–641. DOI: 10.3934/mcrf.2021015.
25. Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. Vol. 52. No. 1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900.
26. Weibel C. Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne: EPFL. 2007. 114 p. DOI: 10.5075/epfl-thesis-3883.
27. Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д. Приближение выпуклых множеств многогранниками // Сиб. мат. ж. 1975. № 16. С. 1110–1112.



Methods of Numerical Simulation of 0-Controllable Sets of a Linear Discrete Dynamical System with Limited Control Based on Polyhedral Approximation Algorithms

Arina A. Mokhnacheva*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>

e-mail: Arina140803@mail.

Kristina V. Gerasimova**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-8631>

e-mail: kristina.gerasimova.2002@gmail.com

Danis N. Ibragimov***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: rikk.dan@gmail.com

The article deals with the problem of constructing a polyhedral approximation of the 0-controllable sets of a linear discrete-time system with linear control constraints. To carry out the approximation, it is proposed to use two heuristic algorithms aimed at reducing the number of vertices of an arbitrary polyhedron while maintaining the accuracy of the description in the sense of the Hausdorff distance. The reduction of the problem of calculating the distance between nested polyhedra to the problem of convex programming is demonstrated. The issues of optimality of obtained approximations are investigated. Examples are given.

Keywords: linear discrete-time system, controllable set, polyhedron, Hausdorff distance, polyhedral approximation, quadratic programming.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant No. 23-21-00293)

For citation:

Mokhnacheva A.A., Gerasimova K.V., Ibragimov D.N. Methods of Numerical Simulation of 0-Controllable Sets of a Linear Discrete Dynamical System with Limited Control Based on Polyhedral Approximation. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 84–110. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130405> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Arina A. Mokhnacheva**, Student of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>, e-mail: Arina140803@mail.ru

****Kristina V. Gerasimova**, Student of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5668-8631>, e-mail: kristina.gerasimova.2002@gmail.com

*****Danis N. Ibragimov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

References

1. Agrachev A.A., Sachkov YU.L. Geometricheskaya teoriya upravleniya [Geometric theory of control]. Moskva: Fizmatlit = Moscow: Physical education. (In Russ).
2. Boltyanskij V.G. Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
3. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. DOI: 10.31857/S0005231021120047
4. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. DOI: 10.1134/S000511792112002X
5. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. O zadache bystrodeistviya dlya klassa lineinykh avtonomnykh beskonechnomernykh sistem s diskretnym vremenem i ogranichennym upravleniem // AIT. 2017. No. 10. C. 3–32. DOI: 10.1134/S0005117917100010
6. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756. DOI: 10.1134/S0005117917100010
7. Kamenev G.K. Chislennoe issledovanie effektivnosti metodov poliedral'noj approksimacii vypuklyh tel [Numerical investigation of the effectiveness of polyhedral approximation methods for convex bodies]. Moskva: Vychislitel'nyj centr RAN = Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences. 2010. (In Russ.).
8. Kozlov M.K., Tarasov S.P., Khachiyan L.G. Polinomial'naya razreshimost' vypuklogo kvadrachnogo programirovaniya // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 1980. V. 20. No. 5. P. 1319–1323.
9. Kozlov M.K., Tarasov S.P., Khachiyan L.G. The polynomial solvability of convex quadratic programming // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. V. 20. No. 5. P. 223–228. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90098-1.
10. Kronover R.M. Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh. Osnovy teorii. [Fractals and chaos in dynamical systems. Fundamentals of theory]. Moskva: Postmarket = Moscow: Postmarket. 2000. (In Russ).
11. Malyshev V.V., Krasil'shchikov M.N., Bobronnikov V.T., Nesterenko O.P., Fedorov A.V. Sputnikovyye sistemy monitoringa. Analiz, sintez i upravleniye. [Satellite monitoring systems. Analysis, synthesis and management]. Moskva: MAI = Moscow: MAI. 2000. (In Russ).
12. Propoj A.I. Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh processov [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moskva: Nauka = Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
13. Rokafellar R. Vypuklyj analiz [Convex analysis]. Moskva: Mir = Moscow: Mir. 1973. (In Russ.).



14. Sirotin A.N. Upravlyaemost' lineinykh diskretnykh sistem s ogranichennym upravleniem i (pochti) periodicheskimi vozmushcheniyami // AIT. 2001. № 5. P. 53–64.
15. Sirotin A.N. Controllability of linear discrete systems with bounded control and (almost) periodic disturbances // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 5. P. 724–734. DOI: 10.1023/A:1010266622197.
16. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1996. Vol. 4. No. 22. P. 469–483. DOI: 10.1145/235815.235821.
17. Benvenuti L., Farina L. The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2006. Vol. 28. No. 2. P. 306–325. DOI: 10.1137/040612531.
18. Colonius F., Cossich J.A.N., Santana A.J. Controllability properties and invariance pressure for linear discrete-time systems // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2022. Vol. 34. P. 5–22. DOI: 10.1007/s10884-021-09966-4.
19. Darup M.S., Mönnigmann M. On general relations between null-controllable and controlled invariant sets for linear constrained systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328. DOI: 10.1109/CDC.2014.7040380.
20. Fucheng L., Mengyuan S., Usman Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // Mathematical Problems in Engineering. 2019. P. 1–11. DOI: 10.1155/2019/8434293.
21. Ge S.S., Zhendong S., Lee T.H. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46. No. 9. P. 1437–1441. DOI: 10.1109/9.948473.
22. Heemels W.P.M.H., Camlibel M.K. Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun. 2008. P. 3487–3492. DOI: 10.1109/CDC.2008.4739333.
23. Kaba M.D., Camlibel M.K. A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 2015. Vol. 53. No. 4. P. 2350–2372. DOI: 10.1137/140960967.
24. Kostousova E.K. External polyhedral estimates of reachable sets of discrete-time systems with integral bounds on additive terms // Mathematical Control and Related Fields. 2021. Vol. 11. No. 3. P. 625–641. DOI: 10.3934/mcrf.2021015.
25. Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. Vol. 52. No. 1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900.
26. Weibel C. Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne: EPFL. 2007. 114 p. DOI: 10.5075/epfl-thesis-3883.
27. Bronshteyn Ye.M., Ivanov L.D. Priblizheniye vypuklykh mnozhestv mnogogrannikami [Approximation of convex sets by polyhedra] // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 1975. No. 16. P. 1110–1112. (In Russ).

Получена 01.11.2023

Принята в печать 20.11.2023

Received 01.11.2023

Accepted 20.11.2023

◆◆◆◆◆ КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ◆◆◆◆◆

УДК 004.89

Разработка информационной системы для психологической диагностики

Савенков Е.А. *

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>
e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

Катышев Д.А. **

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>
e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Ермаков С.С. ***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>
e-mail: ermakovss@mgppu.ru

Юрьева Н.Е. ****

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>
e-mail: yurieva.ne@gmail.com

В статье рассматривается информационная система, являющаяся прототипом адаптивного тренажёра, созданного на основе реализации марковских процессов для психологической диагностики, адаптирующего трудность и сложность заданий в соответствии с диагностической оценкой в реальном времени. Представлено описание системы для адаптивной диагностики уровня подготовки пользователей на основе марковских моделей. Система позволяет оценить уровень готовности пользователя путем предоставления ему заданий различной сложности и трудности в соответствии с марковским процессом. Сформирован алгоритм по созданию заданий с высоким порядком детализации градиента сложности, на примере предметной области профессионального консультирования, с целью диагностики способностей. При неправильных



ответах или превышении временных ограничений пользователь попадает в «ловушку», где получает более простые задания с подсказками. Приведены примеры, иллюстрирующие применения информационной системы, а также результаты апробации.

Ключевые слова: компьютерный адаптивный тренажёр, марковский процесс, психологическая диагностика, информационная система, искусственный интеллект

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации (Минпросвещения России) в рамках научного проекта № 073-00038-23-02 от 13.02.2023 г.

Для цитаты:

Савенков Е.А., Катыхшев Д.А., Ермаков С.С., Юрьева Н.Е. Разработка информационной системы для психологической диагностики // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 111–125. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130406>

***Савенков Егор Андреевич**, младший научный сотрудник, лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>, e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

****Катыхшев Дмитрий Алексеевич**, младший научный сотрудник, лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431> e-mail: katysheva@mgppu.ru

*****Ермаков Сергей Сергеевич**, кандидат психологических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Информационные технологии для психологической диагностики», доцент кафедры прикладной математики, факультета Информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>, e-mail: ermakovss@mgppu.ru

******Юрьева Наталия Евгеньевна**, кандидат технических наук, заведующий лабораторией, лаборатория «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе затрагивается то измерение образования, от которого зависит его включающий, то есть инклюзивный потенциал. Инклюзию принято характеризовать как конструкцию системы образования, которая признает разнообразие учащихся в общих группах и принимает ответственность за него [9]. Современная концепция инклюзии на первое место ставит задачу адаптации общества к особенностям составляющих его индивидов.

Адаптивные технологии, представляя перспективное направление современной науки и образования [1, 6, 7, 9, 10, 14], в сочетании с марковскими моделями позволяют



дать более точную диагностическую оценку способностей. Это связано с учётом параметра времени [11] и некоторыми другими преимуществами по сравнению с классической и современной теориями тестирования (СТТ и ИРТ) [15]. Представляемая информационная система демонстрирует следующую последовательность операций. Пользователю предлагаются задания определённого порядка сложности по различным темам предметной области различной трудности. При даче правильного ответа, алгоритм предоставляет пользователю задания темы, трудность которых уже более высокого порядка, а также параллельно возрастает и порядок сложности формулировок заданий.

Главным преимуществом разработки является то, что диагностическая процедура с применением идентифицируемых вероятностных марковских моделей позволяет идентифицировать пользователя как принадлежащего к одному из трёх классов по временным порогам прохождения с установленными вероятностными оценками переходов по состояниям системы, а именно к классам: «готов», «условно готов» и «не готов». Процесс обхода состояний продолжается пока не установятся оценки по основным состояниям системы.

В случае неверного ответа, алгоритм предоставляет пользователю задания той же темы, но более низкого порядка сложности, что соответствует попаданию в «ловушку» в данной паре состояний. Состояния «ловушки» системы позволяют при сохранении трудности темы уменьшить сложность формулировок заданий, создавая соответствующие условия для отработки пользователем в недостаточной степени усвоенного материала. Состояния «ловушки» пропускаются в случае, когда пользователь укладывается во временные пороги ответа на задания и отвечает верно, таким образом позволяя быстро закончить тренировку в случае очевидно высокого уровня подготовки.

Группировка заданий по трудности позволяет сделать процедуру тренировки более случайной внутри каждой пары состояний и тем самым устранить возможность списывания. Дополнительная градация по сложности формы задания позволяет подготовить пользователя к решению наиболее сложносочинённых заданий. Временные оценки прохождения позволяют подготовленному пользователю с лёгкостью миновать длительную диагностическую процедуру тренировки.

2. ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ С ПОМОЩЬЮ ИДЕНТИФИЦИРУЕМЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

В разработанном адаптивном тренажёре профорIENTATIONНОЙ работы адаптивная диагностическая процедура представляет математическую модель, разработанную и реализованную для решения широкого спектра задач. В работах Л.С. Куравского и соавторов [4; 5; 6; 7; 8; 9; 12; 13]. В реализованной информационной системе марковский процесс имеет следующий вид:

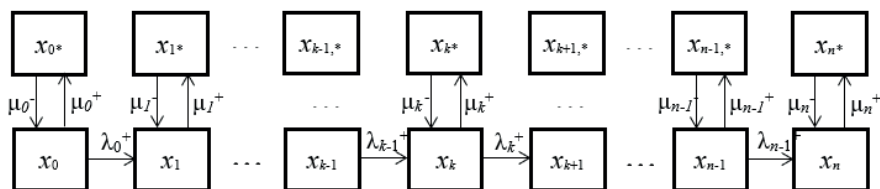


Рис. 1. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, представляющий динамику оценки: $\{x_i\}_{i=0, \dots, n}$ и $\{x_{i*}\}_{i=0, \dots, n}$ – состояния процесса, $\lambda_i = (\lambda_{0,i}^+, \dots, \lambda_{n-1,i}^+, \mu_{0,i}^+, \dots, \mu_{n,i}^+, \mu_{0,i}^-, \dots, \mu_{n,i}^-)$ – упорядоченное множество интенсивностей переходов между состояниями для уровня подготовки испытуемого I

Функциональные состояния «ловушек» предлагают пользователю для отработки материал, соответствующий его текущему уровню подготовки («ловушки» рис. 1 представлены состояниями x_{k*}). Также эти состояния исключают вероятность угадывания правильного ответа, так как для выхода из состояния необходимо не только уложиться по времени, но и дать два правильных ответа подряд. Завершение тренировки предполагает прохождение пользователем всех основных состояний x_k . Интенсивности переходов между основными состояниями соответствуют λ_k . Интенсивности переходов между основным состоянием и состоянием «ловушки» соответствуют μ_k .

В рамках модели процедура диагностики представляет собой получение данных об интенсивности переходов для испытуемого I , и сопоставление их с усреднёнными выборочными интенсивностями переходов для различных по уровню подготовки выборок.

Информационная система на основе данной модели записывает данные множества интенсивностей переходов между состояниями пользователя и упорядочивает их, а затем их соотносят с апробационными выборочными оценками.

Предполагаемые значения интенсивности переходов между состояниями соответствующие различным уровням подготовки испытуемых могут быть получены из наблюдений в виде временных порогов прохождения состояний системы.

3. ПРЕДОСТАВЛЕНИЕ ЗАДАНИЙ С ВЫСОКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИЕЙ СЛОЖНОСТИ

Задания внутри состояний предоставляются отдельно по группам с заданными темами разной трудности, данные о которой получены в результате апробации. Для каждой темы предназначено своё основное состояние и соответствующее состояние «ловушки». Задания предоставляются пользователю в случайном порядке с целью устранить возможность списывания.



Таблица 1

**Соответствие понятий области
профконсультирования определённым уровням сложности**

Понятия уровень сложности		Сложность-1	Сложность-2	Сложность-3
1	Базовые понятия профориентации	+		
2	Роль школьных консультантов по вопросам карьеры	+		
3	Этические принципы и профессиональные стандарты	+		
4	Мотивы выбора профессии	+		
5	Ценности и черты характера	+		
6	Интересы и склонности в выборе профессии	+	+	
7	Профессиограммы и профориентационные тесты	+	+	
8	Самооценка и уровень притязаний		+	
9	Оценка мотивов выбора профессии		+	
10	Профориентационные игры и упражнения		+	
11	Психологические барьеры и уровень внутренней свободы		+	+
12	Выявление и анализ родительских установок		+	+
13	Знания о современном рынке труда			+
14	Соответствующие возрасту личностные тесты			+
15	Профессиональный и личностный рост			+

Помимо возрастания порядка трудности темы, по мере успешного прохождения, возрастает и порядок сложности предоставляемых заданий по форме. Теоретические вопросы по соотношению понятий и определений могут считаться элементарными заданиями в рамках выбранной предметной области. Более высокий порядок сложности по форме включает кейс-задания, позволяющие диагностировать на основе соответствия временных порогов принадлежность пользователя к заданным классам по уровню способности к единичным операциям и простым навыкам в рамках практики, соответствующей предметной области. Наибольший же порядок сложности включает экспертные кейс-задания, требующие комплексного внимательного рассмотрения, затрагивающие пройденные ранее темы в совокупности, которые могут быть расценены как более сложные по количеству элементарных смыслов и операций в рамках решения.

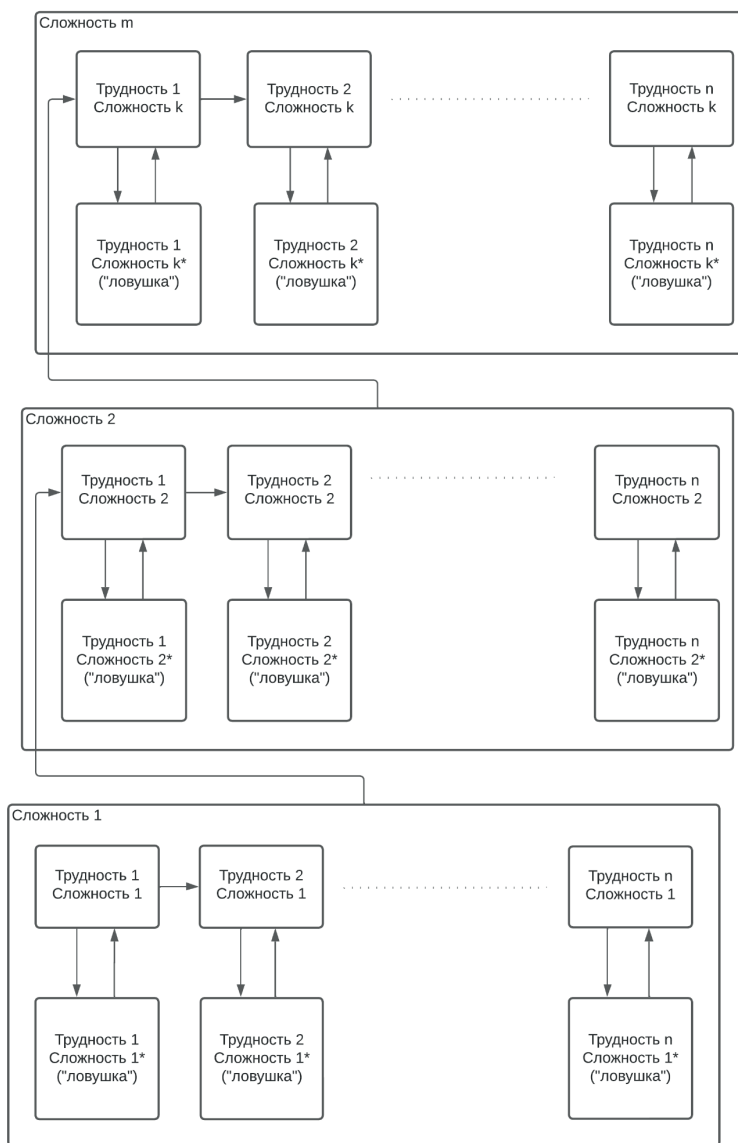


Рис. 2. Схема адаптации заданий разной сложности и трудности в соответствии с марковским процессом. Состояния ловушек сложности k^* включают предоставление заданий более простых формулировок ответов

Уровень сложности формы ответов на задание уже понижается при попадании в состояние hk^* , в случае дачи ошибки в задании, либо в случае несоответствия временным



рамкам для прохождения основного состояния. В таком случае, предлагаются более очевидные формулировки для заданий той же темы, на которых пользователь получает также подсказку, позволяющую усвоить дидактический материал и дать правильный ответ, после чего вновь быть перенаправленным в соответствующее основное состояние диагностического процесса и использовать оставшееся время на прохождение остальных состояний.

По завершении времени, отведённого на тренировку, формируется сводка прохождения, с подробной информацией о результатах. Данные результаты применимы для составления итоговой диагностической оценки при обработке в соответствии с моделью марковского процесса, а именно путём сопоставления ожидаемых частот пребывания в состояниях для каждого из диагностических уровней, для проверки вероятности принадлежности данных прохождения пользователя к тому или иному диагностическому уровню среди заданных. Данные результаты представляют из себя единичные диагностические оценки на каждой теме рассматриваемой предметной области, и в связи со временем пребывания в состояниях могут быть построены и приведены в согласованность наблюдений и диагностического уровня байесовские оценки типа « $x_k + x_{k*}$ » ($k=0, 1, \dots, n$). Добавим, что, в дальнейшем, может быть произведено преобразование марковских моделей в квантовые представления для исследования диагностического процесса с помощью квантового спектрального анализа [3 ;7; 8; 13].

4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕНАЖЕРА ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Программная реализация тренажера профориентационной работы психологов-консультантов включает в себя серверную и интерфейсную часть.

- Серверная часть реализована через веб-фреймворк CakePHP с дополнительными модулями Authentication и Authorization предоставляющий функционал для доступа пользователей к публичной и административной части тренажера. В качестве языка программирования используется PHP версии 8.2.1.
- Интерфейсная часть реализована через фреймворк Bootstrap с набором шрифтов и значков Font Awesome. Также для предоставления редакторам более гибких возможностей по управлению содержимым тренажера в административной части был задействован платформонезависимый JavaScript HTML WYSIWYG редактор TinyMCE с дополнительным реализованным функционалом по загрузке файлов.

Для развертывания тренажера был задействован сервер с операционной системой Debian и веб-сервер Nginx. В качестве базы данных был задействован PostgreSQL.

5. ПРОХОЖДЕНИЕ ТРЕНАЖЕРА ПРОФОРИЕНТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Тренажер считается пройденным при прохождении всех состояний Марковского процесса. Пользователю на это выделяется 20 минут после чего происходит закры-



тие сеанса тестирования. Для тренажера профориентационной работы проиллюстрирована схема марковского процесса, представляющего процесс его прохождения (Рис. 3). В нем нижние ячейки представлены 7 состояниями и разделены на 3 уровня сложности: элементарный (2 состояния), основной (3 состояния) и экспертный (2 состояния). К каждому состоянию подключены группы с заданиями повышенной сложности из которых пользователь случайно получает задание. Верхние ячейки содержат ловушки, в которые пользователь прибывает при даче неверного ответа или если он не уложился в ограничения по времени для данной задачи. К ним подключены группы с заданиями пониженной сложности с подсказками по их выполнению. Для выхода из ловушек пользователь должен выбрать верный вариант ответа и уложится во временные ограничения.

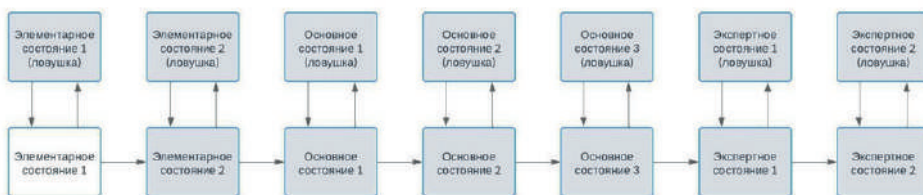


Рис. 3. Схема марковского процесса

Для начала сеанса прохождения тренажера профориентационной работы пользователь переходит по URL-ссылке. Здесь он должен ввести данные своей учетной записи, полученной от редактора или администратора. Введя учетные данные, пользователь изучает инструкцию тренажера и переходит к прохождению своего первого задания в «Элементарном состоянии 1» марковского процесса (Рис. 4).

На рисунке представлено название тренажера в данном варианте «Тренажер профориентационной работы». Потом, специальное окно с подсказкой, выделенное другим цветом, возникающее, когда пользователь попадает в состояние ловушки марковского процесса и ему требуется дополнительная помощь для выбора верного варианта ответа. После подсказки идёт инструкция, содержащая указания по решению выбранной задачи. Далее идет текст задачи, на которую пользователю предстоит ответить и 4 варианта ответа. Задача считается решенной если пользователь верно выбрал вариант ответа и уложился строго в отведенное на выполнение задачи время.

После выбора варианта ответа система проверяет решение задачи и при правильном результате отправляет пользователя в следующие состояние марковского процесса. Если выбран неверный вариант ответа или пользователь не уложился во временные ограничения он переводится в ловушку для данного состояния. Для выхода из неё пользователь должен верно решить задачу и вернуться в обычное состояние. Сохранение результатов в базу данных происходит при каждом выборе варианта ответа и при начале сеанса прохождения тренажера. Если пользователь хорошо подготовлен, то он пройдет тренажер за 7 правильно решенных заданий без попадания в ловушки. По мере прохождения состояний марковского процесса

растёт сложность и трудность заданий, которые предоставляются пользователю. Плохо подготовленный пользователь начинает застревать на определенном этапе прохождения постоянно переходя из обычного состояния в состояния ловушки и наоборот. Это приводит к исчерпанию времени отведенного на прохождение тренажера с последующим закрытием сеанса.

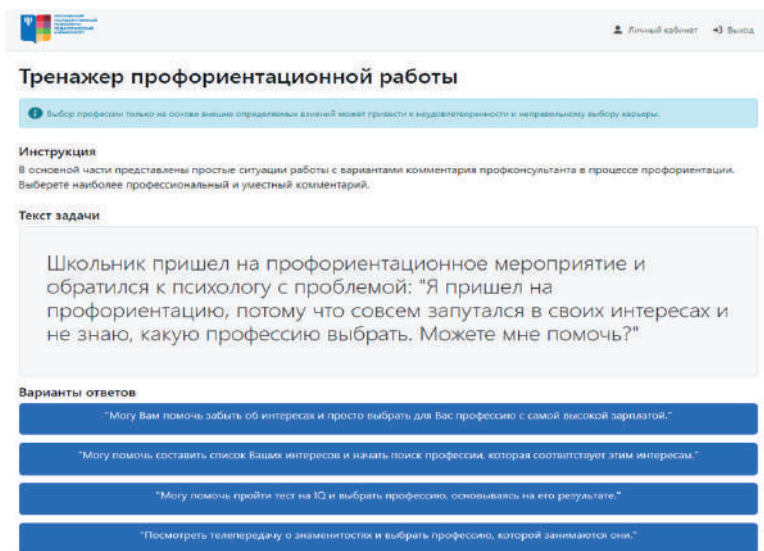


Рис. 4. Интерфейс тренажера для пользователя

Далее, приведём гистограммы распределений вероятностей итогового результата прохождения тренажера для каждого из семи состояний. На рисунках 5-11 представлены данные о вероятности присваиваемого типа пользователя при условии выхода из текущего состояния в следующее, для каждого из семи состояний.

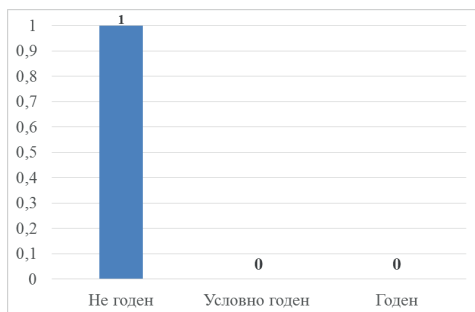


Рис. 5. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 1 (элементарное состояние-1)

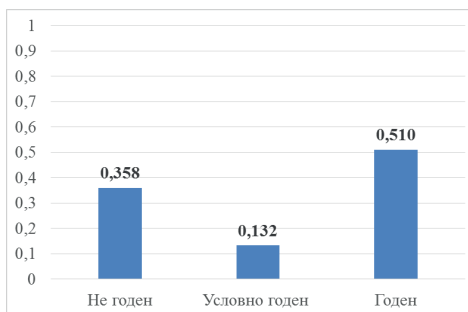


Рис. 6. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 2 (элементарное состояние-2)

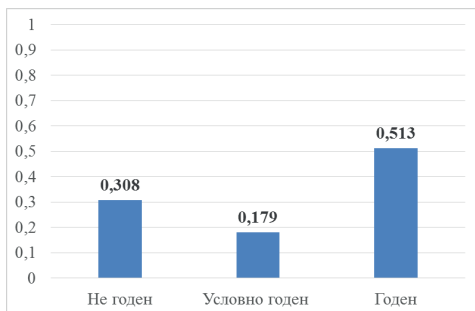


Рис. 7. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 3 (основное состояние-1)

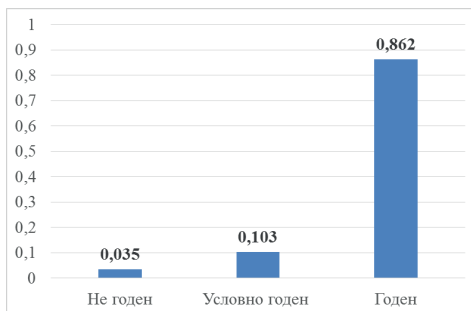


Рис. 8. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 4 (основное состояние-2)

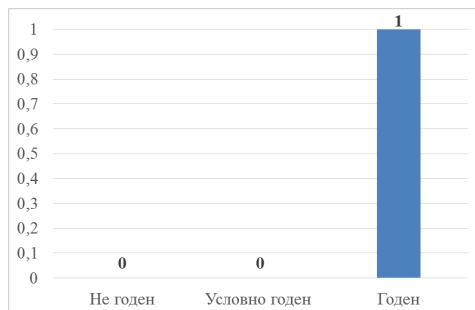


Рис. 9. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 5 (основное состояние-3)

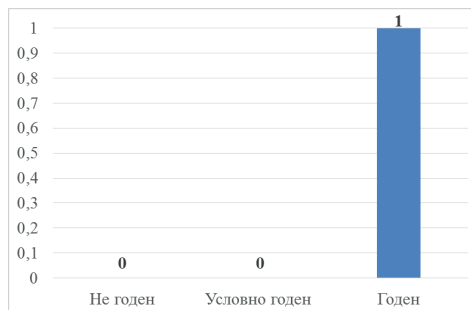


Рис. 10. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 6 (экспертное состояние-1)

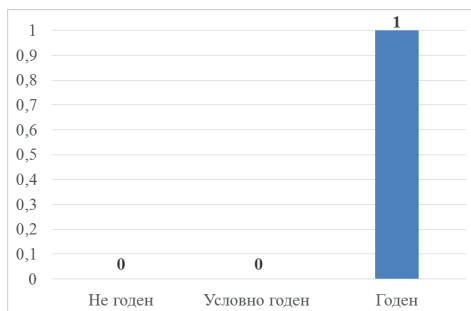


Рис. 11. Значения вероятности принадлежности пользователя к определённому классу при выходе из состояния 7 (экспертное состояние-2)



Данные гистограммы распределений вероятностей демонстрируют, как со временем увеличивается дифференциация принятия решений между отнесением пользователей к определённом классу. В элементарном состоянии-2 и основном состоянии-1 дифференциация по классам достаточно слабая, в отличие от последующего основного состояния-2, где наблюдается гораздо более явная дифференциация. Получается, что этот рост также отражает рост диагностической ценности перехода между состояниями.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная информационная система на основе марковских моделей демонстрирует эффективность в решении задач адаптивной психологической диагностики. Использование данного подхода позволяет получить более точную и объективную оценку уровня подготовки и способностей пользователей за счет учета динамики ответов и временных показателей.

Представленный в статье алгоритм формирования заданий с высокой степенью дифференциации по сложности и трудности обеспечивает постепенный рост нагрузки в процессе тестирования. Это позволяет подготовить пользователя к решению сложных комплексных задач.

Результаты апробации подтверждают эффективность разработанной информационной системы в оценке уровня подготовки пользователей. Дальнейшее совершенствование системы на основе марковских и квантовых моделей открывает перспективы применения данного подхода в различных областях обучения и психодиагностики.

Литература

1. Коляда М.Г., Бугаева Т.И., Миклашевич Н.В. Адаптивное тестирование с возможностями искусственного интеллекта // МОО «Академия информатизации образования». Орел: Изд. ОГУ им. И.С. Тургенева, 2020. С. 265–273.
2. Корсини Р., Ауэрбах А. Психологическая энциклопедия. СПб: «Питер», 2006. 1876 с.
3. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. – 2011. – № 2. – С. 21–29.
4. Куравский Л.С., Артеменков С.Л., Юрьев Г.А., Григоренко Е.Л. Новый подход к компьютеризированному адаптивному тестированию // Экспериментальная психология. – 2017. – Т. 10, № 3. – С. 33–45. doi:10.17759/exppsy.2017100303
5. Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Панфилова А.С., Юрьев Г.А. Математические аспекты концепции адаптивного тренажера // Психологическая наука и образование. 2016. Том 21. № 2. С. 84–95.
6. Куравский Л.С., Марголис А.А., Юрьев Г.А., Поминов Д.А. Концепция самообучающегося адаптивного тренажера // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2018. № 3. С. 29–37.
7. Куравский Л.С., Поминов Д.А., Юрьев Г.А., Юрьева Н.Е., Сафронова М.А., Куланин Е.Д., Антипова С.Н. Концепция адаптивного тренажера и оценка его эффективности в математическом обучении // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 4. С. 5–20. DOI:10.17759/mda.2021110401



8. Куравский Л.С., Юрьев Г.А., Юрьева Н.Е., Исаков С.С. Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 4.
9. Куравский Л.С., Юрьева Н.Е., Юрьев Г.А., Ермаков С.С., Исаков С.С., Леонович Н.И., Несимова А.О., Николаев И.А. Разработка информационной системы для психологической диагностики с использованием элементов искусственного интеллекта. Государственное задание Министерства просвещения Российской Федерации № 073-00110-22-06 от 12.12.2022 г.
10. Осипов Г.В. Российская социологическая энциклопедия. М: Издательская группа НОРМА-ИНФРА М, 1998. 672 с.
11. Федерякин Д.А. Время ответа в компьютерном адаптивном тестировании [Электронный ресурс] // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: Материалы IV Международной научной конференции. В 2 ч., Красноярск, 06–09 октября 2020 года. Том 2. Ч. 2. Сибирский федеральный университет, Красноярск. 2020. С. 249–255. URL: <https://publications.hse.ru/chapters/412400421>
12. Kuravsky L.S. Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations. *Lobachevskii J. Math.*, 42 (10), 2364–2376 (2021).
13. Kuravsky L.S. Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations // *Lobachevskii J. Math.* 2022. № 43(7). P. 1669–1682.
14. Kyllonen P.C., et al. Implementing Soft skills training in gift // *Design Recommendations for Intelligent Tutoring Systems*. 2022. Vol. 9: Competency-Based Scenario Design. P. 49.
15. Ермаков С.С., Савенков Е.А., Шенелева Е.А. Анализ возможностей компьютеризированного адаптивного подхода к задачам психологической диагностики и обучения // *Экспериментальная психология*. 2023. Том 16. № 3. С. 182–196. DOI: 10.17759/exppsy.2023160312



Development of the Information System for Psychological Diagnostics

Egor A. Savenkov*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>
e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

Dmitry A. Katyshev**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>
e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Sergey S. Ermakov***

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>
e-mail: ermakovss@mgppu.ru

Nataliya E. Yuryeva****

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>
e-mail: yurieva.ne@gmail.com

The article deals with the information system, which is a prototype of an adaptive simulator created on the basis of the realization of Markov processes for psychological diagnostics, adapting the difficulty and complexity of tasks in accordance with the diagnostic assessment in real time. The description of the system for adaptive diagnostics of user readiness level based on Markov models is presented. The system allows estimating the user's readiness level by giving him/her tasks of different difficulty and complexity according to the Markov process. An algorithm for creating tasks with a high order of detailing the complexity gradient, on the example of the subject area of professional counseling, for the purpose of diagnosing abilities is formed. In case of incorrect answers or exceeding time limits, the user falls into a "trap" where he/she receives simpler tasks with hints. Examples illustrating the application of the information system are given, as well as the results of approbation.

Keywords: computer adaptive simulator, Markov process, psychological diagnosis, information system, artificial intelligence

Funding. The research was carried out with the financial support of the Ministry of Education of the Russian Federation (Ministry of Education of Russia) within the framework of the scientific project № 073-00038-23-02 from 13.02.2023.

For citation:

Savenkov E.A., Katyshev D.A., Ermakov S.S., Yuryeva N.E. Development of the Information System for Psychological Diagnostics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 111–125. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130406> (In Russ., abstr. in Engl.).



***Egor A. Savenkov**, Junior Researcher, Laboratory “Information Technologies for Psychological Diagnostics”, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8510-0468>, e-mail: mr.absolute.official@hotmail.com

****Dmitry A. Katyshev**, Junior Researcher, Laboratory “Information Technologies for Psychological Diagnostics”, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: katyshevda@mgppu.ru

*****Sergey S. Ermakov**, PhD (Psychology), Senior Researcher of the Laboratory “Information Technologies for Psychological Diagnostics”, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Faculty of Information Technologies, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>, e-mail: ermakovss@mgppu.ru

******Nataliya E. Yuryeva**, PhD (Engineering), Head of Laboratory, Laboratory Information Technologies for Psychological Diagnostics, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

References

1. Kolyada M.G., Bugaeva T.I., Miklashevich N.V. Adaptivnoe testirovanie s vozmozhnostyami iskusstvennogo intellekta // MOO «Akademiya informatizatsii obrazovaniYA». Orel: Izd. OGU im. I.S. Turgeneva, 2020. P. 265–273.
2. Korsini R., Auehrbakh A. Psikhologicheskaya ehntsiklopediya. SPb: «PiteR», 2006. 1876 s.
3. Kuravskii L.S., Yur'ev G.A. Adaptivnoe testirovanie kak markovskii protsess: modeli i ikh identifikatsiya // Neurokomp'yutery: razrabotka i primeneniye. – 2011. – № 2. – P. 21–29.
4. Kuravskii L.S., Artemenkov S.L., Yur'ev G.A., Grigorenko E.L. Novyi podkhod k komp'yuterizirovannomu adaptivnomu testirovaniyu // Ehksperimental'naya psikhologiya. – 2017. – Т. 10, № 3. – P. 33–45. doi:10.17759/exppsy.2017100303
5. Kuravskii L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yur'ev G.A. Matematicheskie aspekty kontseptsii adaptivnogo trenazhera // Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie. 2016. Tom 21. № 2. P. 84–95.
6. Kuravskii L.S., Margolis A.A., Yur'ev G.A., Pominov D.A. Kontseptsiya samoobuchayushchegosya adaptivnogo trenazhera // Neurokomp'yutery: razrabotka i primeneniye. 2018. № 3. P. 29–37.
7. Kuravskii L.S., Pominov D.A., Yur'ev G.A., Yur'eva N.E., Safronova M.A., Kulanin E.D., Antipova S.N. Kontseptsiya adaptivnogo trenazhera i otsenka ego ehffektivnosti v matematicheskoy obuchenii // Modelirovanie i analiz dannykh. 2021. Tom 11. № 4. P. 5–20. DOI:10.17759/mda.2021110401
8. Kuravskii L.S., Yur'ev G.A., Yur'eva N.E., Isakov S.S. Adaptivnaya tekhnologiya psikhologicheskoy diagnostiki na osnove markovskikh i kvantovykh predstavlenii protsessa vypolneniya zadaniy // Modelirovanie i analiz dannykh. 2022. Tom 12. № 4.
9. Kuravskii L.S., Yur'eva N.E., Yur'ev G.A., Ermakov S.S., Isakov S.S., Levonovich N.I., Nesimova A.O., Nikolaev I.A. Razrabotka informatsionnoy sistemy dlya psikhologicheskoy diagnostiki s ispol'zovaniem ehlementov iskusstvennogo intellekta. Gosudarstvennoye zadanie Ministerstva prosveshcheniya Rossiiskoy Federatsii № 073-00110-22-06 ot 12.12.2022 g.
10. Osipov G.V. Rossiiskaya sotsiologicheskaya ehntsiklopediya. M: Izdatel'skaya gruppa NORMA-INFRA M, 1998. 672 s.



11. Federyakin D.A. Vremya otveta v komp'yuternom adaptivnom testirovani [Elektronnyi resurs] // Informatizatsiya obrazovaniya i metodika ehlektronnogo obucheniya: tsifrovye tekhnologii v obrazovanii: Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii. V 2 ch., Krasnoyarsk, 06–09 oktyabrya 2020 goda. Tom 2. CH. 2. Sibirskii federal'nyi universitet, Krasnoyarsk. 2020. P. 249–255. URL: <https://publications.hse.ru/chapters/412400421>
12. Kuravsky L.S. Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations. *Lobachevskii J. Math.*, 42 (10), 2364–2376 (2021).
13. Kuravsky L.S. Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations // *Lobachevskii J. Math.* 2022. № 43(7). P. 1669–1682.
14. Kyllonen P.C., et al. Implementing Soft skills training in gift // *Design Recommendations for Intelligent Tutoring Systems.* 2022. Vol. 9: Competency-Based Scenario Design. P. 49.
15. Ermakov S.S., Savenkov E.A., Shepeleva E.A. Analysis the Possibilities of the Computerized Adaptive Approach to the Problems of Psychological Diagnostics and Training. *Ekspierimental'naâ psihologiâ = Experimental Psychology (Russia)*, 2023. Vol. 16, no. 3, pp. 182–196. DOI: 10.17759/expsy.2023160312. (In Russ., abstr. in Engl.)

Получена 16.11.2023
Принята в печать 27.11.2023

Received 16.11.2023
Accepted 27.11.2023

УДК 005.935

Информационная система для комплексной оценки эмоционального состояния

Нуркаева И.М.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>
e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

В работе рассматриваются вопросы разработки информационной системы диагностики эмоционального состояния. Определены средства разработки, требования к ним.

Ключевые слова: тест, тестирование, информационная система, проектирование, самооценка, психическое состояние

Для цитаты:

Нуркаева И.М. Информационная система для комплексной оценки эмоционального состояния // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 126–139. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130407>

1. ВВЕДЕНИЕ

Эмоциональное состояние – это особая форма психического состояния человека, которая выражается в эмоциональном реагировании на окружающую действительность и самого себя [15].

Эмоции влияют на общее состояние здоровья и психики человека. Они выступают в роли регулятора поведения и активности. Длительно пребывание под воздействием негативных эмоций способно привести к нервным срывам, нарушениям в работе всех систем организма [2].

Диагностика эмоциональных состояний позволяет вовремя отслеживать:

- неврозы;
- страхи;
- агрессивность;
- тревожность;

***Нуркаева Ирина Михайловна**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: nurkaevaim@yandex.ru.



- суицидальные настроения;
- депрессию.

Чем ранее будет выявлена проблема, тем больше шансов на ее успешное разрешение.

Существует огромное количество методик диагностики эмоциональных состояний. Были выбраны две методики: «Самооценка психических состояний» Г. Айзенка и «Самооценка эмоциональных состояний» А. Уэссмана, Д. Рикса.

Методика самооценки психических состояний относится к одному из личностных опросников. Личностные опросники Г. Айзенка обладают высокими коэффициентами надежности и валидности, что позволяет широко их применять в практической психодиагностике.

Тест самооценки психических состояний ориентирован на исследование психологического состояния человека путем диагностики таких психических состояний, как тревожность, фрустрация, агрессивность и ригидность.

Тревожность относится к психологическим особенностям человека индивидуального характера. Ее проявления связаны со склонностью человека испытывать сильную тревогу из-за весомых и незначительных поводов. Фактически, тревожность является психологическим состоянием эмоционального напряжения, повышенного беспокойства человека.

Под фрустрацией понимается психическое состояние, которое характеризуется внутренним дискомфортом, досадой, тревогой. Оно проявляется в отсутствии событий, ожидаемых человеком, не исполнения надежд, появления преград на пути к цели.

Агрессия является поведением человека, характеризующимся чрезмерной психологической активностью, стремление к лидерству за счет использования силы по отношению к другим людям.

Ригидность (твердость, жесткость) означает неготовность человека к модификации программы действий согласно новым появляющимся ситуационным требованиям.

Другим опросником для самооценки эмоциональных состояний является методика, разработанная американскими психологами А. Уэссманом и Д. Риксом.

Методика применяется для самооценки эмоциональных состояний и степени бодрствования. Данная методика эффективна, если необходимо выявить изменение эмоционального состояния человека на протяжении определенного периода времени.

По результатам оценки исследуемый получает данные по уровням эмоциональных состояний:

- спокойствие – тревожность;
- энергичность – усталость;
- приподнятость – подавленность;
- уверенность в себе – беспомощность.

И также комплексную оценку путем сложения всех результатов.

Разработанная информационная система позволяет быстро провести тестирование, анализ результатов психического состояния.



2. ВЫБОР ИНСТРУМЕНТОВ РЕАЛИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Базы данных для прохождения теста Г. Айзенка «Самооценка психических состояний» предполагает использование реляционной базы данных для хранения и обработки данных.

В качестве сравнительных характеристик баз данных выбирались следующие параметры (таблица 1):

- обеспечение хранения больших объемов данных в связи с постоянным ростом количества пользователей, прошедших тестирование в соответствии с предложенной методикой;
- варианты реализуемых в рамках СУБД технологий защиты данных, в том числе с использованием специализированных протоколов (особенности теста Г. Айзенка «Самооценка психических состояний» требуют использования дополнительных технологий защиты каналов передачи данных);
- варианты используемых операционных систем для расширения возможностей по организации интеграции с другими информационными системами;
- технологии доступа к серверу и стандарт SQL для возможности поддержки решения и дальнейшей его интеграции в ИТ-инфраструктуру.

Выбор в пользу MS SQL Server 2018 осуществляется не только в связи с наличием бесплатного решения, но и с учетом возможности использования современного протокола шифрования TLS.

Данный протокол обеспечивает более высокий уровень защиты, кроме этого, предусмотрено множество встроенных простых и удобных инструментов настройки защиты сервера MS SQL Server 2018 и каналов передачи.

Разработка клиентской части системы для разработки системы теста Г. Айзенка «Самооценка психических состояний» и теста А. Уэссмана, Д. Рикса «Самооценка эмоциональных состояний» предполагает использование высокоуровневого языка программирования, поддерживающего объектно-ориентированную методологию.

Реализация работы клиентского приложения совместно с базой данных осуществляется посредством встроенных компонентов и драйверов. Варианты реализации разного вида компонент для выбранных СУБД представлены ниже (таблица 1).

Применение скриптовых языков в данном случае будет требовать установки веб-сервера IIS или его компонентов для реализации работы СУБД. К тому же многоуровневая архитектура более уязвима. Работа пользователей, имеющих доступ в интернет и использующих его в своей работе, может быть связана с передачей конфиденциальной информации и может стать источником прорех в защите в случае использования для доступа браузера.



Таблица 1

Принципы организации работы с сервером базы данных

Сервер	Компоненты	Классы	Драйверы
Oracle MySQL Enterprise	API для Delphi, C, C++, Эйфель, Java, Лисп, Perl, PHP, Python, Ruby,	API для Delphi, C, C++, Эйфель, Java, Лисп, Perl, PHP, Python, Ruby	ODBC, MyODBC
MS SQL Server Enterprise 2016	C/C++, C#	Для ADO, ODBC, JDBC	OLE DB
Postgres Pro Enterprise	C, C++, Java (через модуль PL/Java)	Поддержка для PL/Lua, PL/LOLCODE, PL/Perl, PL/PHP, PL/Python, PL/Ruby	Поддержка для PL/Lua, PL/LOLCODE, PL/Perl, PL/PHP, PL/Python, PL/Ruby

Наиболее оптимальным будет использование RAD-среды Microsoft Visual Studio 2019, в рамках которой можно вести разработку на нескольких языках, например на C# и легко управлять версиями программного обеспечения.

Для проведения сравнительного анализа языков программирования в рамках выбранной предметной области выбираются следующие параметры:

- простота взаимодействия с выбранной СУБД MSSQL Server и наличие простых инструментов получения доступа к СУБД;
- возможность разработки запросов к базе данных в рамках RAD-среды;
- возможность построения сложного интерфейса с использованием элементов управления;
- возможность использования UML-диаграмм в рамках среды;
- простота использования, которая предполагает оценку сложности и громоздкости используемых технологий для реализации;
- наличие бесплатных решений с широкими функциональными возможностями.

3. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ БАЗЫ ДАННЫХ

Структура базы данных строится на базе проведенного анализа технологии реализации теста Айзенка «Самооценка психических состояний» и теста А. Уэссмана, Д. Рикса «Самооценка эмоциональных состояний». Основными сущностями, необходимыми для хранения данных выступают:

- пользователи системы, выполняющие прохождение теста или его подготовку в зависимости от наделенных прав;
- оцениваемые эмоциональные состояния;
- вопросы теста с разделением по оцениваемым состояниям;
- результаты прохождения тестирования;
- утверждения, необходимые для управления тестом А. Уэссмана, Д. Рикса;
- анализ результатов прохождения тестирования.

Особенности построения теста А. Уэссмана, Д. Рикса «Самооценка эмоциональных состояний» не позволяют его унифицировать для применения формата теста

Г. Айзенка «Самооценка психических состояний». Хранение данных осуществляется в формате каждого теста.

Полученная в результате формирования физическая структура базы данных представлена на рисунке 1.

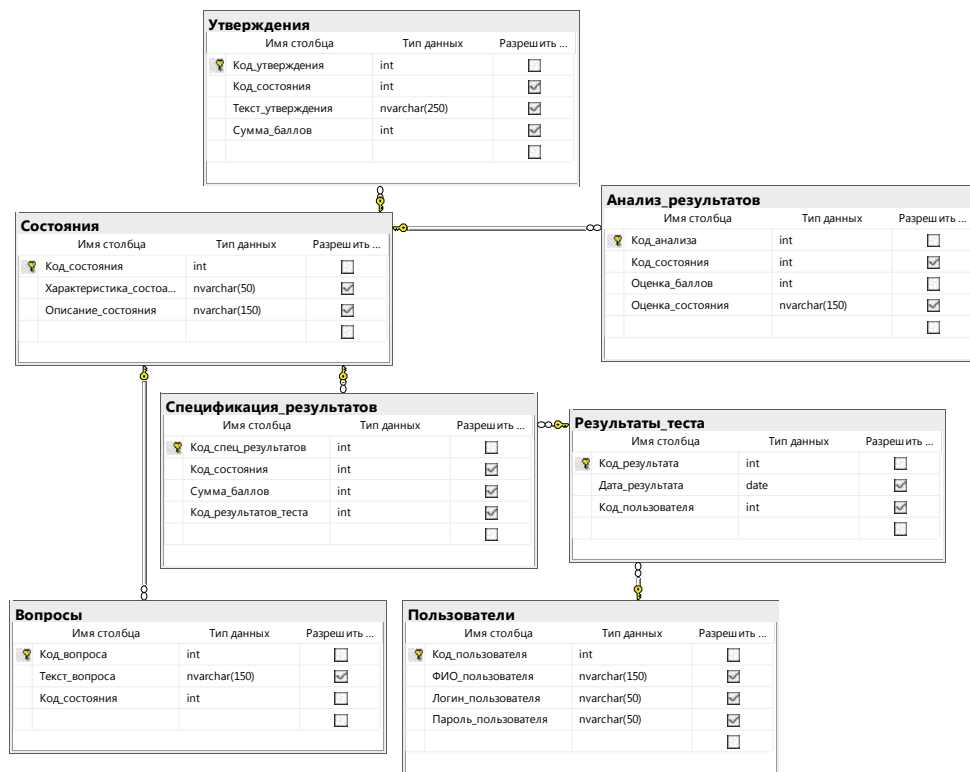


Рис. 1. Физическая структура базы данных, реализованная в MSSQL Server 2018

4. РАЗРАБОТКА ИНТЕРФЕЙСА

Разработанное приложение имеет многооконный интерфейс. За навигацию отвечает главная форма приложения.

Структура интерфейса разработанного приложения приведена на рисунке 2.

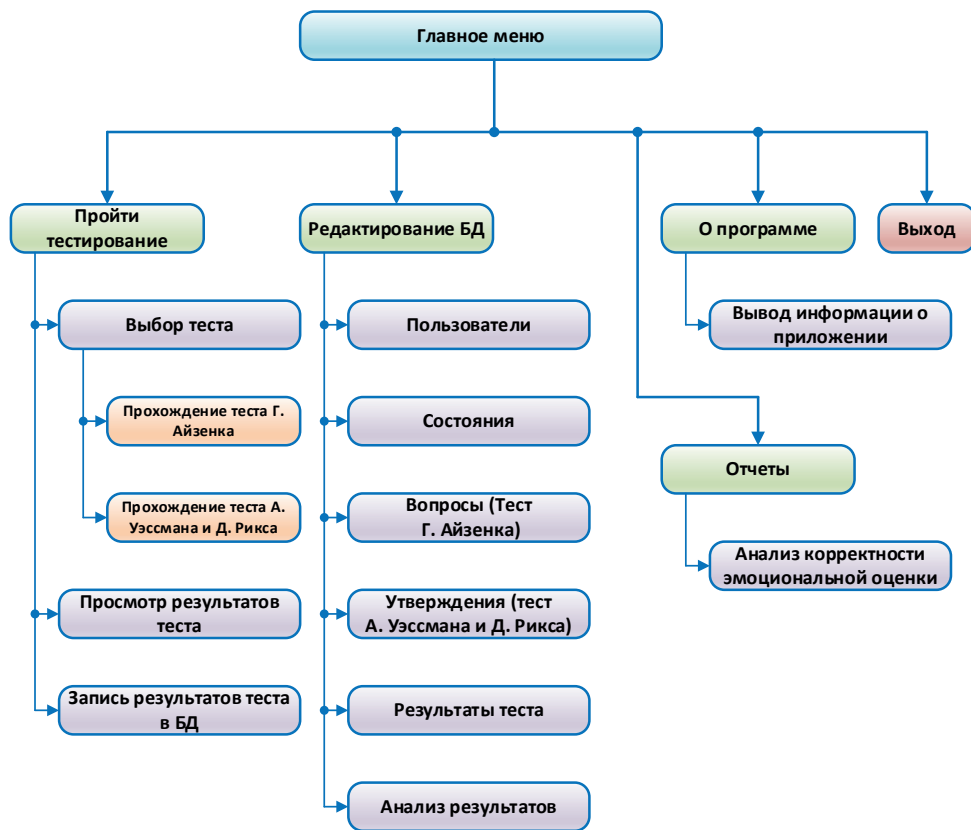


Рис. 2. Структура интерфейса приложения

5. ТЕСТИРОВАНИЕ И ОТЛАДКА ПРИЛОЖЕНИЯ

После запуска приложения на экране появляется форма авторизации (рис. 3). Пользователь должен выбрать свой логин из выпадающего списка и ввести пароль.

Если количество попыток ввода превысит максимально допустимое (на данный момент оно установлено равным 5), на экране появится соответствующее уведомление и программа завершит свою работу.

Если пароль введен корректно, открывается главная форма приложения. Поскольку в системе тестирования реализована политика разделения прав, пользователю

с правами администратора будут доступны все функциональные возможности программы, тогда как обычные пользователи не будут иметь доступа к пункту главного меню «Редактирование БД».

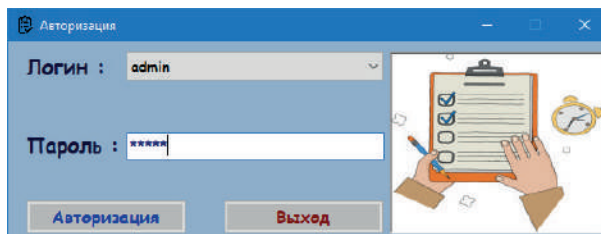


Рис. 3. Форма авторизации

Для лучшего понимания возможностей приложения в дальнейшем будет иметься в виду, что осуществлен вход пользователя, наделенного правами администратора. Главная форма имеет вид, показанный на рисунке 4.

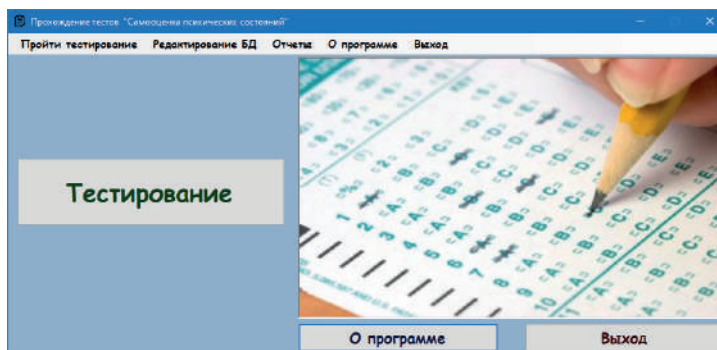


Рис. 4. Главная форма приложения

Пользователь может перейти к тестированию, выбрав пункт главного меню «Пройти тестирование», либо нажав на кнопку «Тестирование».

Произойдет открытие формы выбора теста (рис. 5).

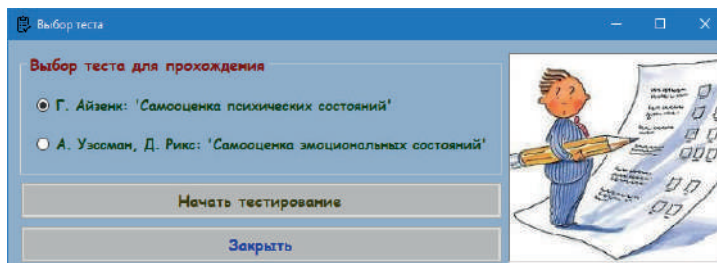


Рис. 5. Форма выбора теста

Пользователю необходимо выбрать требуемый тест и нажать кнопку «Начать тестирование». Далее открывается форма тестирования. Пример такой формы для теста Г. Айзенка приведен на рисунке 6.

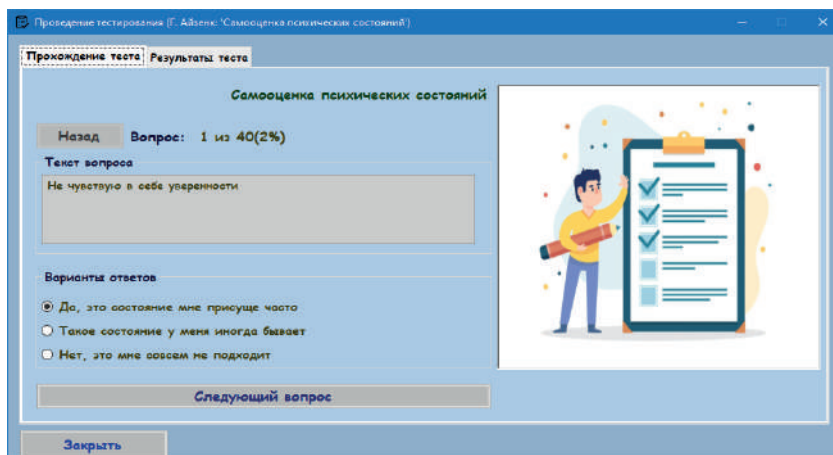


Рис.6. Форма тестирования (тест Г. Айзенка)

На вкладке «Прохождение теста» указаны номер текущего вопроса, его текст и варианты ответов. После выбора нужного варианта ответа необходимо нажать кнопку «Следующий вопрос», после чего произойдет фиксация ответа и переход к следующему вопросу. На любом вопросе, кроме первого, пользователь может откатиться назад для изменения ответов на ранее заданные вопросы. Для этого требуется нажатие кнопки «Назад».

После ответа на последний вопрос на экран будет выведено сообщение о завершении теста. После этого на вкладке «Результаты теста» будут находиться итоги осуществленного пользователем тестирования (рис. 7).

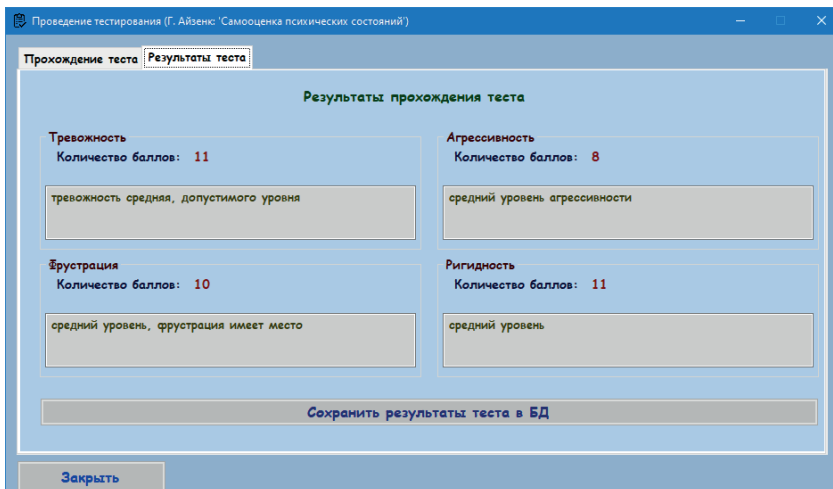
По нажатию кнопки «Сохранить результаты теста в БД» будет осуществлена запись полученных результатов в соответствующие таблицы базы данных для дальнейшего просмотра. После успешного сохранения кнопка «Сохранить результаты теста в БД» станет недоступной.

Аналогично, при выборе теста А. Уэссмана, Д. Рикса открывается форма прохождения тестирования (рис. 8).

На вкладке «Прохождение теста» приведены четыре категории. По каждой из них пользователю из выпадающего списка необходимо выбрать наиболее соответствующее своему эмоциональному состоянию утверждение.

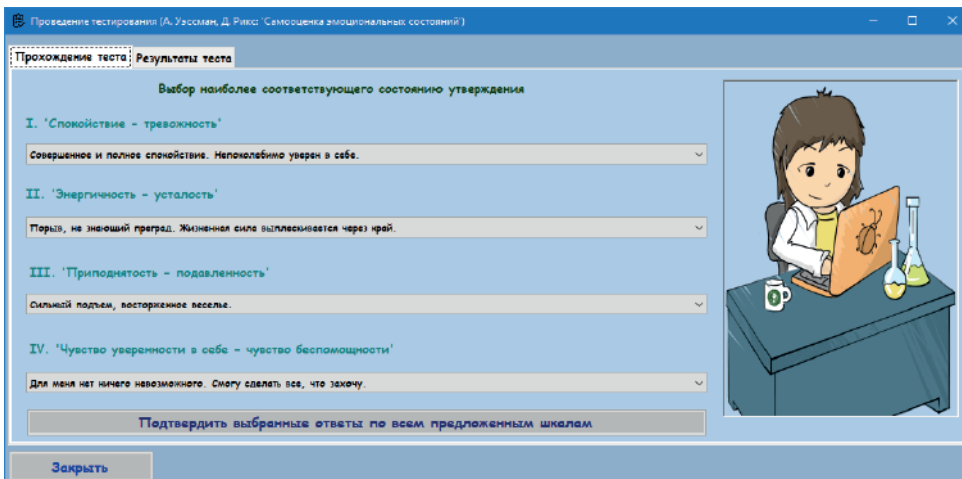
После выбора всех утверждений требуется нажатие кнопки «Подтвердить выбранные ответы по всем предложенным шкалам». После этого на вкладке «Результаты теста» будут находиться итоги осуществленного пользователем тестирования (рис.9). Выдается сумма баллов по каждой из четырех шкал оценки эмоционального

состояния, а также итоговая сумма баллов. Итоговая сумма баллов находится в диапазоне [4; 40] баллов, а каждая из шкал оценки ранжирована в интервале [1; 10].



Категория	Количество баллов	Описание
Тревожность	11	тревожность средняя, допустимого уровня
Агрессивность	8	средний уровень агрессивности
Фрустрация	10	средний уровень, фрустрация имеет место
Ригидность	11	средний уровень

Рис. 7. Результаты тестирования (тест Г. Айзенка)



Выбор наиболее соответствующего состоянию утверждения

- I. 'Спокойствие - тревожность'
Совершенное и полное спокойствие. Непокорлимо уверен в себе.
- II. 'Энергичность - усталость'
Терпиз, не знающий преград. Жизненная сила выплескивается через край.
- III. 'Приподнятость - подавленность'
Сильный подъем, восторженное веселье.
- IV. 'Чувство уверенности в себе - чувство беспомощности'
Для меня нет ничего невозможного. Силу сделать все, что захочу.

Подтвердить выбранные ответы по всем предложенным шкалам

Рис. 8. Форма тестирования (тест А. Уэссмана, Д. Рикса)

По нажатию кнопки «Сохранить результаты теста в БД» будет осуществлена запись полученных результатов в соответствующие таблицы базы данных для дальнейшего просмотра. После успешного сохранения кнопка «Сохранить результаты теста в БД» станет недоступной.

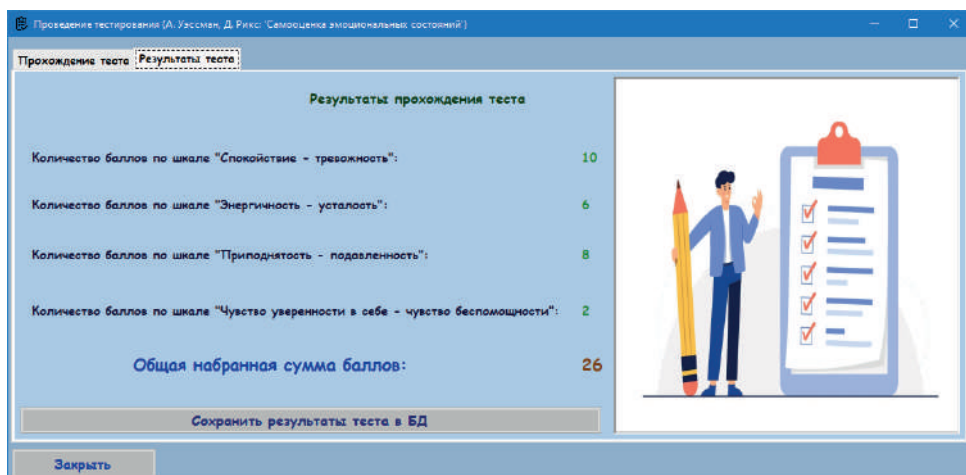


Рис. 9. Результаты тестирования (тест А. Уэссмана, Д. Рикса)

Форма справочника «Состояния» имеет вид, показанный на рисунке 10. В нем указана характеристика психического состояния, а также краткое описание каждой из характеристик.

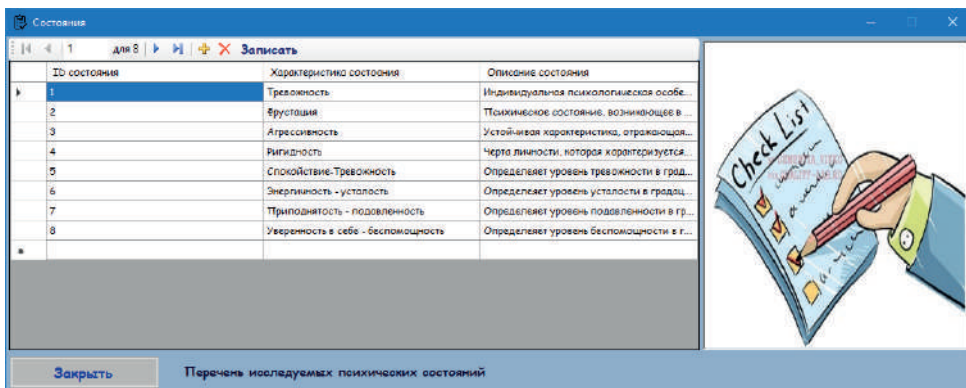


Рис. 10. Форма справочника «Состояния»

Пользователь с правами администратора может просмотреть статистику результатов тестирования пользователей. Для этого предусмотрена форма «Результаты теста» (рис. 11). В верхней таблице содержатся сведения о дате тестирования, номере тестирования и ФИО пользователя, прошедшего тест.

В системе тестирования предусмотрена отчетность. При выборе пункта меню «Отчеты -> Анализ корректности эмоциональной оценки» на экран выводится форма отчета (рис. 12).

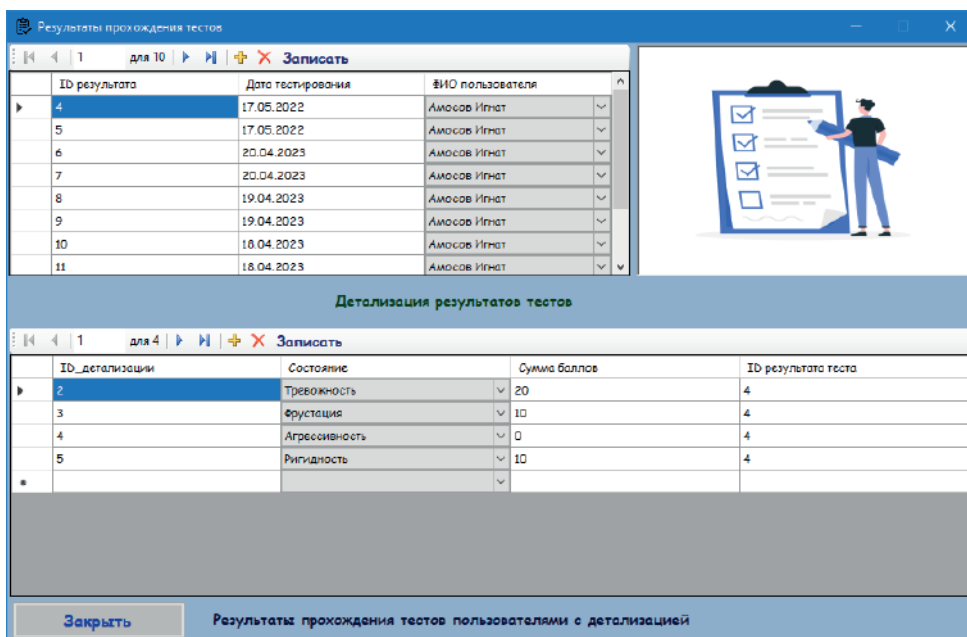


Рис. 11. Форма «Результаты теста»

Пользователь должен выбрать из выпадающих списков ФИО исследуемого лица, а также первое и второе эмоциональное состояния, между которыми будет осуществляться поиск корреляции. Пример формы результатов отчета можно увидеть на рисунке 12.

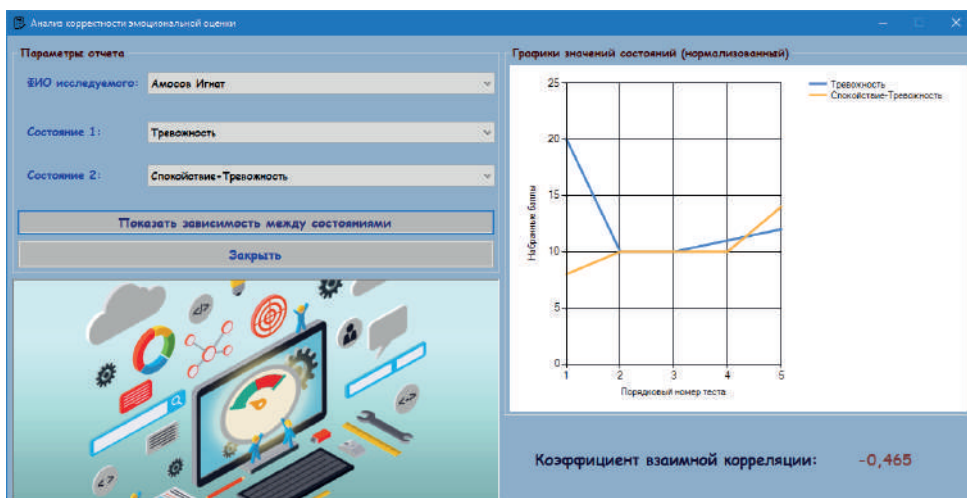


Рис. 12. Результат отчета «Анализ корректности эмоциональной оценки»

Представлены графики набранных баллов по каждому из выбранных состояний по каждому тесту, а также рассчитан коэффициент корреляции между выбранными состояниями.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная информационная система предоставляет пользователям проходить тестирование и оперативно получать данные об эмоциональном состоянии с целью снижения уровня тревожности.

Литература

1. Барканова О.В. Методика диагностики эмоциональной сферы: психологический практикум / сост. О.В. Барканова. – Вып. 2. – Красноярск: Литера-принт, 2009. – 237 с.
2. Киселева Л.А., Помазуева Т.Н. Мир эмоций человека и регуляция деятельности: учебно-методическое пособие. – Екатеринбург, Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2007, 68 с.
3. Куравский Л.С., Нуркаева И.М., Юрьев Г.А. Дисциплина «Информатика и программирование»: программа, методические рекомендации и учебные пособия: Учебное пособие. – 2-е издание дополненное. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2017. – 102 с.
4. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении // Моделирование и анализ данных. – 2020. – Т. 10. – № 2. – С. 110–128.
5. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Ещё раз о задаче Мавло // Математика в школе. – 2020. – № 2. – С. 76–79.
6. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум // Математика в школе. – 2019. – № 4. – С. 35–40.
7. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М., Степанов М.Е. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики // Моделирование и анализ данных. – 2019. – № 4. – С. 127–144.
8. Нуркаева И.М., Зайцев А.Н., Оглоблин А.А. Информационная система для мониторинга учебных достижений студентов МГППУ // Моделирование и анализ данных. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2019. – № 1. – С. 30–41.
9. Нуркаева И.М., Коморова К.А. Информационная система диагностики профессионального выгорания педагогов // Моделирование и анализ данных. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2017. – Т. 1 – № 1. – С. 95–103.
10. Нуркаева И.М., Корчагина К.А. Информационная система для учебно-методической поддержки дисциплины «Численные методы линейной алгебры» // Моделирование и анализ данных. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2020. – № 1. – С. 176–188.
11. Нуркаева И.М. Особенности обучения программированию незрячих студентов МГППУ образовании. Сб. науч. трудов. – М.: МИФИ, 2004 – ч. IV. – С. 100–101.
12. Нуркаева И.М. Методика организации самостоятельной работы учащихся с компьютерными моделируемыми программами на занятиях по физике: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. – Московский педагогический государственный университет. – М., 1999. – 16 с.
13. Нуркаева И.М., Артемова А.А. Информационная система диагностики стрессоустойчивости педагогов // Моделирование и анализ данных. – 2021. – Т. 11. – № 4. – С. 59–71.
14. Психология личности: тесты, опросники, методики / Авт. сост. Н.В. Киршева и Н.В. Рябчикова. – М.: Геликон, 1995.
15. Советский энциклопедический словарь. / Гл. ред. А.М. Прохоров. – Москва, 1989. – 504 с.



Information System for Comprehensive Assessment of Emotional State

Irina M. Nurkaeva*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>

e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

The paper deals with the development of an information system for the diagnosis of emotional state. The development tools and their requirements are defined.

Keywords: test, testing, information system, design, self-assessment, mental state

For citation:

Nurkaeva I.M. Information System for Comprehensive Assessment of Emotional State. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 126–139. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130407> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Barkanova O.V. Methods of diagnostics of the emotional sphere: psychological workshop / comp. O.V. Barkanova. – Issue 2. – Krasnoyarsk: Litera-print, 2009. – 237 p.
2. Kiseleva. L.A. Pomazueva T.N. The world of human emotions and regulation of activity: an educational and methodological manual. – Yekaterinburg, Ural. state Forestry Engineering. un-ta, 2007, 68 p.
3. Kuravsky L.S., Nurkaeva I.M., Yuryev G.A. Discipline “Computer Science and programming”: program, methodological recommendations and textbooks: Textbook. – 2nd edition supplement-ed. – Moscow: FGBOU V MGPPU, 2017. – 102 p.
4. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking // *Modeling and data analysis*. – 2020. – Vol. 10. – No. 2. – pp. 110–128.
5. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo problem // *Mathematics at school*. – 2020. – No. 2. – pp. 76–79.
6. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems at the extremum // *Mathematics at school*. – 2019. – No. 4. – pp. 35–40.
7. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M., Stepanov M.E. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics // *Modeling and data analysis*. – 2019. – No. 4. – pp. 127–144.
8. Nurkaeva I.M., Zaitsev A.N., Ogloblin A.A. Information system for monitoring academic achievements of students of MGPPU // *Modeling and data analysis*. – M.: FSUE V MGPPU, 2019. – No. 1. – pp. 30–41.

***Irina M. Nurkaeva**, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: nurkaevaim@yandex.ru



9. Nurkaeva I.M., Komorina K.A. Information system for diagnosing professional burnout of teachers // Modeling and data analysis. – M.: FSUE V MGPPU, 2017. – Vol. 1 – No. 1. – P. 95–103.
10. Nurkaeva I.M., Korchagina K.A. Information system for educational and methodological support of the discipline “Numerical methods of linear algebra”// Modeling and data analysis. – M.: FGBOU V MGPPU, 2020. – No. 1. – p. 176–188.
11. Nurkaeva I.M. Features of teaching programming to the blind students of MGPPU education. Collection of scientific works. – M.: MEFPI, 2004 – part IV. – C. 100–101.
12. Nurkaeva I.M. Methods of organizing independent work of students with computer modeling programs in physics classes: abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Pedagogical Sciences. – Moscow Pedagogical State University. – M., 1999. – 16 p.
13. Nurkaeva I.M., Artemova A.A. Information system of diagnostics of stress resistance of teachers // Modeling and data analysis. – 2021. – Vol. 11. – No. 4. – pp. 59–71.
14. Psychology of personality: tests, questionnaires, methods / Author. comp. N.V. Kirsheva and N.V. Ryabchikova. – M.: Helikon, 1995.
15. Soviet Encyclopedic Dictionary. / Editor-in-Chief A.M. Prokhorov. – Moscow, 1989. – 504p.

Получена 20.11.2023

Принята в печать 06.12.2023

Received 20.11.2023

Accepted 06.12.2023

УДК 519.856

О задаче формирования портфеля облигаций по вероятностному критерию в модели Кокса-Ингерсолла-Росса

Соболь В.Р.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ НИУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1275-0445>
e-mail: vitsobol@mail.ru

Торишный Р.О.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ НИУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9732-6247>
e-mail: arenas-26@yandex.ru

Рассматривается задача формирования портфеля купонных облигаций в случае, когда динамика процентных ставок описывается моделью Кокса-Ингерсолла-Росса. В качестве критерия оптимальности выбрана функция вероятности, что приводит к задаче стохастического программирования с вероятностным критерием. Решение задачи стохастического программирования получено с использованием гладкой аппроксимации функции вероятности и ее производных и метода проекции градиента. Приводится пример расчета оптимальной структуры портфеля.

Ключевые слова: стохастическое программирование, вероятностный критерий, портфель облигаций, модель Кокса-Ингерсолла-Росса

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках научного проекта № 22-21-00213.

Для цитаты:

Соболь В.Р., Торишный Р.О. О задаче формирования портфеля облигаций по вероятностному критерию в модели Кокса-Ингерсолла-Росса // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 140–152. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130408>

***Соболь Виталий Романович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ НИУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1275-0445>, e-mail: vitsobol@mail.ru



****Торишний Роман Олегович**, инженер, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ НИУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9732-6247>, e-mail: arenas-26@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Облигации являются основой инвестиционного портфеля ключевых институциональных инвесторов, таких как страховые компании и негосударственные пенсионные фонды. Облигация – это долговая ценная бумага, гарантирующая держателю получение фиксированной суммы, называемой номиналом, в момент погашения облигации, а также промежуточных процентных выплат, называемых купонами, если они предусмотрены для конкретной облигации. Облигации позволяют компании их выпустившей – эмитенту – получить финансирование в большем объеме и на более привлекательных условиях, в сравнении с банковскими кредитами, если на облигации этого эмитента будет спрос. В свою очередь, для инвестора – покупателя облигаций – это способ вложить средства зачастую под более высокую ставку, чем на банковском вкладе, и при этом иметь возможность практически в любой момент времени продать облигацию и получить свои деньги без потери процентного дохода.

Для бескупонных облигаций и облигаций с фиксированным купоном все будущие выплаты заранее известны владельцу облигации, если пренебречь риском неисполнения обязательств со стороны эмитента. Риск полного или частичного неисполнения обязательств также называется кредитным риском. При этом, даже в отсутствие кредитного риска, облигации нельзя рассматривать как полностью безрисковый инструмент. Причина кроется в колебаниях рыночных цен облигаций во времени вплоть до момента их погашения. Инвестор не может заранее определить цену, по которой он сможет продать или купить облигации в произвольную дату до момента их погашения. Основным фактором, влияющим на рыночные цены уже существующих облигаций является рыночная ставка заимствований, отражающая доходность вложений денежных средств в текущий момент времени. Эта же ставка определяет доходность новых выпусков облигаций на рынке. Рост рыночной ставки означает появление новых выпусков облигаций с более высокой доходностью и, как следствие, к снижению цен уже обращающихся на рынке бумаг. Снижение цен облигаций в свою очередь приводит к росту их доходности (для новых владельцев), что в итоге компенсирует изменение ставок. Напротив, снижение рыночных ставок ведет к росту цен старых выпусков облигаций и снижению их доходности, так как купонные ставки по ним будут предпочтительнее в сравнении с новыми выпусками. Формирование портфеля из облигаций с разным сроком до погашения и разными купонными ставками может помочь инвестору снизить риски существенного снижения цены портфеля при колебаниях ставки.

Задачам формирования оптимального портфеля ценных бумаг посвящено огромное количество книг и статей. Основополагающие результаты были получены Гарри Марковицем в 1952 году [1]. Он математически сформулировал задачу формирования портфеля ценных бумаг с учетом ожидаемой доходности и риска. Доходность



портфеля рассматривалась как случайная величина, зависящая от случайных же доходностей отдельных активов, входящих в портфель. Мерой риска являлась дисперсия доходности итогового портфеля.

Постановка задачи и результаты Марковица открыли множество вопросов для дальнейшего исследования. Каким образом моделировать доходности активов в портфеле? Каким образом учитывать возможности ребалансировки портфеля, то есть изменения его структуры во времени? Какой критерий оптимальности портфеля или меру риска выбрать? Мера риска в форме дисперсии доходности имеет очевидный недостаток – если отклонения доходности от средней в меньшую сторону нежелательны для инвестора, то отклонения в большую сторону для инвестора выгодны. Минимизация же дисперсии ограничивает отклонения в обе стороны. С течением времени одним из наиболее популярных критериев стал VaR-критерий (value-at-risk), также называемый квантильным критерием [2,3]. Квантильный критерий в задачах формирования оптимального портфеля ценных бумаг отражает либо минимальный уровень дохода, который будет получен с заданной вероятностью, или же максимальный уровень потерь, который будущие потери не превзойдут с той же заданной вероятностью. Схожим по смыслу и подходам к исследованию является вероятностный критерий, который отражает вероятность того, что доходность окажется не меньше заданного уровня, или же что потери не превысят заданный порог. Подробно свойства и взаимосвязь квантильного и вероятностного критериев описаны в [5].

Для моделирования доходностей финансовых активов также разработаны различные подходы. В [4] для моделирования доходностей двух рисковых активов используется равномерное распределение, являющееся наихудшим для вероятностного критерия [5]. В [6] для моделирования цен акций использовался аппарат копул, при этом задача формирования оптимального портфеля не исследовалась. В [7] исследуется оценка VaR-критерия для негауссовского распределения доходностей активов.

Важно отметить, что наибольшее число исследований посвящено задачам формирования оптимального портфеля акций или производных финансовых инструментов, когда основная часть средств направляется на приобретение рисковых активов без гарантий дохода и возврата средств, но с более высокой ожидаемой доходностью. При этом предполагается возможность вложения части средств в безрисковый актив. Ставка доходности безрискового актива в целях упрощения, как правило, полагается известной и постоянной. Это допущение становится неадекватным в случае, когда портфель преимущественно или полностью состоит из облигаций. В этом случае необходимо учитывать рисковую природу вложений в облигации, то есть зависимость цен от динамики процентных ставок. Одной из основных моделей процентных ставок является модель Васичека [7], а ее развитием – модель Кокса-Ингерсолла-Росса [8].

В [9] представлено решение задачи формирования оптимального портфеля бескупонных облигаций по вероятностному критерию. Однако, рассмотренная в [9] модель имеет ряд существенных ограничений. Во-первых, в портфель облигаций не включались купонные облигации, хотя именно такие бумаги наиболее распространены на рынке. Во-вторых, изменения цен облигаций во времени упрощенно



моделировались с помощью многомерного гауссовского вектора. В-третьих, для решения задачи исходный функционал доходности заменялся на его линейную аппроксимацию. Таким образом, влияние изменений рыночной ставки заимствований учитывалось лишь косвенно (через допущение о возможной зависимости компонент гауссовского вектора), а модель динамики рыночной ставки не учитывалась вовсе.

В данной статье рассматривается модель портфеля купонных облигаций, упорядоченных по сроку до погашения, в которой все промежуточные выплаты – суммы купонов и номинала при погашении – инвестируются в бумагу с максимальным сроком до погашения, аналогично [9]. Для моделирования процентной ставки и изменений цен облигаций используется модель Кокса-Ингерсолла-Росса. Поскольку цены покупки самой «длинной» облигации в даты промежуточных выплат заранее неизвестны, такой портфель также подвержен рыночному риску. Итоговое количество наиболее длинных облигаций в портфеле на момент погашения заранее неизвестно. Для минимизации негативного влияния рыночного риска рассматривается задача формирования оптимального портфеля облигаций по вероятностному критерию – то есть задача формирования такого портфеля, для которого вероятность превышения заданного уровня итоговым капиталом будет максимальна.

В первой части статьи приводятся основные допущения модели, описывается процесс динамики процентной ставки и формула расчета рыночной цены облигации с заданными параметрами. Во второй части статьи описывается модель портфеля облигаций и формулируется задача стохастического программирования с вероятностным критерием. В третьей части описывается подход к решению задачи стохастического программирования, основанный на гладкой аппроксимации функции вероятности и ее градиента. В четвертой части приводится пример расчетов.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечислим основные допущения, используемые в модели портфеля облигаций:

- 1) все ценные бумаги бесконечно делимы, то есть существует возможность купить или продать нецелое количество облигаций;
- 2) отсутствуют комиссии за сделки и задержки в исполнении сделок;
- 3) единичная сделка не оказывает влияния на рыночные цены независимо от объема;
- 4) отсутствуют кредитный и инфраструктурный риски;
- 5) все выплаты реинвестируются в облигацию с максимальным сроком до погашения;
- 6) портфель удерживается до погашения всех облигаций;
- 7) выплаты купонов и номинала облигаций происходят в дискретные моменты времени с заданным шагом;
- 8) «короткие» продажи запрещены;
- 9) динамика процентных ставок описывается процессом Кокса-Ингерсолла-Росса (CIR процесс).



Допущения 1–3 обеспечивают возможность проведения сделок любого объема на рыночных условиях. Допущение 7 позволяет снизить размерность задачи, а также пренебречь расчетом накопленного купонного дохода по облигации при ее покупке.

Модель CIR динамики процентной ставки задается стохастическим дифференциальным уравнением [8]:

$$dr = a(\mu - r)dt + \sqrt{r}\sigma dW_t, \quad (1)$$

где μ – равновесная (средняя) ставка, r_0 и r – начальная и текущая ставки заимствований, a – скорость возвращения к средней ставке, σ – коэффициент волатильности, W_t – винеровский процесс.

Модель Кокса-Ингерсолла-Росса является примером однофакторной модели, поскольку учитывает лишь один источник неопределенности будущих ставок через винеровский процесс. Как и модель Васичека, обладает свойством возвращения к среднему. Это важное свойство, поскольку оно не допускает ни бесконечного роста процентных ставок, ни снижения ставок ниже уровня, при котором инвестиции становятся невозможными. Отрицательные ставки в рамках модели Кокса-Ингерсолла-Росса невозможны.

Модель CIR позволяет аналитически найти цену бескупонной облигации как функцию от текущей процентной ставки, оставшегося срока до погашения облигации и параметров процесса. Для заданной текущей процентной ставки $r(t)$ цена бескупонной облигации со сроком до погашения T вычисляется по формулам:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2)$$

$$A(t, T) = \left(\frac{2he^{(a+h)(T-t)/2}}{2h + (a+h)(e^{h(T-t)} - 1)} \right)^{\frac{2a\mu}{\sigma^2}}, \quad (3)$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{h(T-t)} - 1)}{2h + (a+h)(e^{h(T-t)} - 1)}, \quad (4)$$

$$h = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}. \quad (5)$$

Стоимость купонной облигации может быть определена как стоимость портфеля бескупонных облигаций с идентичным денежным потоком, когда бескупонная облигация с заданным сроком погашения «подменяет» в расчете купонную выплату в ту же дату:

$$P(t, T) + \sum_{i=[t]+1}^T cP(t, i). \quad (6)$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ ОБЛИГАЦИЙ

Для модели портфеля облигаций примем следующие обозначения:

N – количество видов облигаций, упорядоченных по сроку погашения;

T_N – горизонт инвестирования (в купонных периодах);

u_i – количество облигаций i -го вида в момент формирования портфеля;

T_i – срок до погашения i -й облигации;

c_i – ставка купона i -й облигации;

K – первоначальный капитал.

Без ограничения общности положим номинал всех облигаций равным 1.

Цена последней облигации в момент времени t определяется как приведенная стоимость будущих выплат по этой облигации (купонных платежей и номинала) в соответствии с формулой (6):

$$S_N(t) = P(t, T_N) + \sum_{i=[t]+1}^{T_N} c_N P(t, i). \quad (7)$$

Общая сумма поступлений от облигаций i -го вида определяется выражением:

$$\sum u_i c_i \cdot I[j \leq T_i] + u_i \cdot I[j = T_i]. \quad (8)$$

Задав все параметры можно рассчитать итоговый капитал инвестора для заданной начальной структуры портфеля:

$$C(u, S) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_i}{S_N(T_i)} + \sum_{k=1}^{T_i} \frac{u_i r_i}{S_N(k)} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{S_N(T_i)} + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{T_i} \frac{u_i r_i}{S_N(k)}. \quad (9)$$

Случайный вектор $S = (S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(T_N))$ состоит из цен N -й облигации в заданные моменты времени. Первая часть суммы соответствует сумме выплаты номинала по последней облигации, приобретенной как в начальный момент времени так и на средства от погашения остальных облигаций в портфеле в заданные моменты времени, без учета купонных платежей. Второе слагаемое соответствует количеству N -х облигаций, приобретенных на поступившие купонные платежи.

Сформулируем оптимизационную задачу. В качестве критерия будем использовать функцию вероятности [5]. В данной задаче функцию вероятности определим как функционал, зависящий от вектора u , значение которого равно вероятности того, что итоговый капитал превысит заданный уровень:

$$P_\phi(u) = P\{C(u, S) \geq \phi\} = M[I[C(u, S) \geq \phi]]. \quad (9)$$

Получаем задачу максимизации функции вероятности



$$P_{\varphi}(u) \rightarrow \max_u, \quad (10)$$

с ограничениями

$$\sum_{i=1}^N u_i S_i(0) \leq K, \quad (11)$$

$$u_i \geq 0, i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Задача (11) с ограничениями (12) и (13) является задачей стохастического программирования с вероятностным критерием. Область допустимых стратегий представляет собой многомерный тетраэдр с вершиной в начале координат и ребрами, лежащими на осях координат, а в случае двух видов облигаций в портфеле – треугольник.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для решения задачи стохастического программирования будем использовать метод проекции градиента. Для оценки градиента будем использовать гладкую аппроксимацию [10] функции вероятности и ее производных. Основная идея аппроксимации – замена разрывной функции Хевисайда в интегральном представлении функции вероятности на сигмоидальную функцию (сигмоиду). Сигмоида является функцией распределения случайной величины, распределенной по логистическому закону с нулевым средним и конечной дисперсией:

$$S_{\theta}(y) = \frac{1}{1 + e^{-\theta y}}, \quad (13)$$

где параметр $\theta \gg 0$ определяет крутизну кривой в окрестности нуля и точность аппроксимации.

Аппроксимация функции вероятности принимает вид:

$$P_{\varphi}^{\theta}(u) = \int_G S_{\theta}(C(u, S) - \varphi) f(x) dx = M[S_{\theta}(C(u, S) - \varphi)], \quad (14)$$

где G – носитель распределения случайного вектора S .

Введем обозначение для производной сигмоиды:

$$S'_{\theta}(x) = \theta S_{\theta}(x)(1 - S_{\theta}(x)). \quad (15)$$

Аппроксимация частных производных по компонентам вектора управления u_i при $i = 1, m$ и частной производной по уровню потерь принимают вид:



$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_i} = M \left[S'_\theta (C(u, S) - \varphi) C'_{u_i}(u, S) \right], \quad (17)$$

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial \varphi} = -M \left[S'_\theta (C(u, S) - \varphi) \right]. \quad (18)$$

В [10–11] доказана поточечная сходимость аппроксимаций функции вероятности и ее производных для любого $i = 1, m$ при $\theta \rightarrow \infty$:

$$P_\varphi^\theta(u) \rightarrow P_\varphi(u), \quad \frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{\partial P_\varphi(u)}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u_i} \rightarrow \frac{\partial P_\varphi(u)}{\partial u_i}. \quad (18)$$

В исследуемой задаче нельзя в явном виде записать плотность распределения вектора цен облигаций в моменты ее покупки. Более того, размерность вектора цен будет расти при увеличении количества купонных периодов и количества различных облигаций, включаемых в портфель. Высокая размерность вектора случайного вектора затрудняет получение точных оценок функции вероятности и ее производных численными методами интегрирования.

Для вычисления приближенных значений функции вероятности и ее производных будем использовать метод Монте-Карло. Для этого необходимо сгенерировать пучок траекторий процесса CIR. Далее для каждой траектории определить значения процентной ставки в моменты получения купонных выплат и погашения облигаций в портфеле. По выборке значений процентной ставки в заданные моменты времени рассчитать стоимость последней облигации для заданной ставки в эти моменты времени. Таким образом, из пучка траекторий получается выборка реализаций случайного вектора S . Значения функции вероятности и ее производных вычисляются как математические ожидания соответствующих функций на полученной выборке.

5. РЕАЛИЗАЦИЯ И ПРИМЕР

Для решения исследуемой задачи разработана программа на языке Python, использующая модули программного комплекса [12]. Входными данными для работы программы являются параметры процесса CIR, сроки облигаций и их купонные ставки. Знание сроков облигаций и купонных ставок позволяет рассчитать денежные потоки от каждой облигации и от портфеля в целом в каждый момент времени. По этим данным можно сформировать функцию итогового капитала по формуле (9), зависящую от случайных цен последней облигации, и функцию ограничений по формуле (12). Построение функций по исходным данным, расчет функции вероятности и ограничений, а также расчет их производных осуществляется автоматически. Отметим, что функция (9) является линейной по компонентам вектора u .



Для наглядности и простоты интерпретации результатов рассмотрим пример портфеля облигаций двух видов со сроками до погашения 2 и 5, которые приобретаются при размещении на первичном рынке по цене номинала, то есть по цене 1. Ставку купона по второй облигации положим равной 5 % и проанализируем зависимость структуры оптимального портфеля от ставки купона по первой облигации. Зададим следующие параметры CIR-процесса:

$$\mu = 5\%, \sigma = 0.5, a = 2, r_0 = 15\%.$$

При заданных параметрах ставка с начального значения 15 % будет снижаться и стремиться к равновесному значению 5 %, что будет приводить к росту цены второй облигации, ее покупка на промежуточные выплаты будет обходиться дороже, чем в начальный момент времени. Первоначальный капитал положим равным 10, а желаемый уровень итогового капитала определим как

$$\varphi = 10(1 + 0.06)^5,$$

то есть доходность вложений на 5 периодов (например, лет) должна на 1 процентный пункт превышать равновесную ставку 5 %.

Для расчета функции вероятности и ее производных по заданным параметрам сгенерировано 20 000 траекторий CIR-процесса и сформирована выборка реализаций случайного вектора S . Значение параметра θ примем равным 5. На рис. 1 представлена зависимость оптимального количества облигаций первого типа в момент формирования портфеля и значения вероятностного критерия. Видно, что с ростом ставки купона по первой облигации вероятность получения капитала не ниже заданного сперва остается неизменной, поскольку эта облигация не включается в портфель, а затем растет. Оптимальная структура портфеля в зависимости от ставки купона предполагает либо вложение всех средств во вторую облигацию, либо только в первую с последующей покупкой второй.

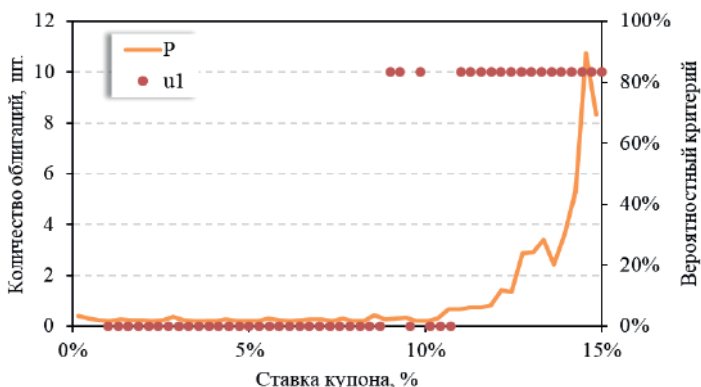


Рис. 1. График зависимости структуры портфеля от ставки купона



Из приведенного примера следует особенность вероятностного критерия в задаче формирования оптимального портфеля ценных бумаг – оптимальная структура портфеля может не предполагать диверсификации вложений в разные ценные бумаги. Более того, если два портфеля с разной ожидаемой доходностью обеспечивают равную (или очень близкую) вероятность достижения требуемой доходности, то по вероятностному критерию более доходный вариант не окажется предпочтительным. Таким образом, на основе полученных результатов следует продолжить исследование различных постановок задач. Например, можно перейти к задаче максимизации ожидаемой доходности при ограничении на вероятность достижения минимальной требуемой доходности. Для этого могут быть использованы уже разработанные программные модули. Другой вариант может быть связан с использованием функции интегральной квантили (CVaR) в качестве критерия, для которого аналогичные инструменты пока не разработаны. Отметим также, что в случае когда облигации в начальный момент времени приобретаются по рыночной цене, а не номинальной стоимости как при первичной продаже эмитентом, ожидаемые изменения ставки и цены облигации уже будут заложены в ее начальную стоимость, то есть ожидаемая доходность вложений в каждую облигацию при отсутствии кредитного риска будет одинаковой. В этом случае влияние структуры портфеля на значение вероятностного критерия будет слабым и трудно интерпретируемым.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследована модель портфеля облигаций, в котором все промежуточные поступления от купонных выплат и погашения облигаций направляются на покупку облигации с максимальным сроком до погашения. Динамика процентных ставок и цен облигаций моделируется с помощью процесса Кокса-Ингерсолла-Росса. Для такой модели составлена задача стохастического программирования с вероятностным критерием и предложен подход к ее решению. То есть впервые получено решение задачи формирования портфеля купонных облигаций по вероятностному критерию с учетом особенностей динамики процентных ставок и ценообразования облигаций. Численный пример показывает адекватные изменения в структуре портфеля при изменении ставок купона. Также из примера следует, что использование вероятностного критерия может приводить к отсутствию диверсификации вложений, что на практике представляется нежелательным. Предполагается дальнейшее исследование модели в части учета кредитного риска по облигациям и в части влияния критерия оптимальности на итоговую структуру портфеля.

Литература

1. *Markowitz Harry M.* Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. 7. № 1 pp. 71–91.
2. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. 2001. № 9. С.101–113.
3. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 179–197.



4. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. 2015. № 7. С. 78–100.
5. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
6. *Барышева А.Е., Марков А.С., Мицель А.А.* Оценка VaR при негауссовом распределении доходностей активов // Российский технологический журнал. 2020. № 8(2). С.67–84.
7. *Vasicek O.* An equilibrium characterization of the term structure // J. Financial Economics. 1977. V. 5. P. 177–188.
8. *Cox J., Ingersoll J., Ross S.* A Theory of the term structure of interest rate // Econometrica. 1985. V. 53. P. 385–407.
9. *Кан Ю.С., Сысуев А.В.* О приближенном решении задачи формирования портфеля ценных бумаг с фиксированным доходом // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 130–141.
10. *Соболь В.Р., Торишный Р.О.* О гладкой аппроксимации вероятностных критериев в задачах стохастического программирования // Тр. СПИИРАН. Т. 19. № 1. 2020. С. 180–217
11. *Sobol V., Torishnyi R.* Smooth approximation of probability and quantile functions: vector generalization and its applications // Journal of Physics: Conference Series. 1925 012034. 2021. P. 1–10.
12. *Торишный Р.О.* Программный комплекс для анализа задач стохастического программирования с вероятностным критерием // ВКит. 2022. Т. 19. № 5(215). С. 3–12.



Bond Portfolio Selection in the Cox-Ingersoll-Ross Framework by the Probabilistic Criterion

Vitalyi R. Sobol*

Moscow Aviation Institute (National Research University)(MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1275-0445>
e-mail: vitsobol@mail.ru

Roman O. Torishniy**

Moscow Aviation Institute (National Research University)(MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9732-6247>
e-mail: arenas-26@yandex.ru

The problem of bond portfolio selection is considered in Cox-Ingersoll-Ross framework. The probability function is chosen as an optimality criterion, which leads to a stochastic optimization problem, The problem is solved using a smooth approximation of the probability function and its derivatives via gradient projection method. An example is provided.

Keywords: bond stochastic programming, probability function, bond portfolio, Cox-Ingersoll-Ross model.

Funding. The reported study was funded by Russian Science Foundation (RSF), project number 22-21-00213

For citation:

Sobol V.R., Torishniy R.O. Bond Portfolio Selection in the Cox-Ingersoll-Ross Framework by the Probabilistic Criterion. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 140–152. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130408> (In Russ.,abstr. in Engl.).

References

1. Markowitz Harry M. Portfolio Selection // *Journal of Finance*. 1952. 7. № 1 pp. 71–91.
2. Kibzun A.I., Kuznetsov E.A. Optimal'noe upravlenie portfelem cennyh bumag // *Avtomatika i telemekhanika*. 2001. № 9. pp. 101–113.
3. Grigor'ev P.V., Kan Yu.S. Optimal'noe upravlenie po kvantil'nomu kriteriyu portfelem cennyh bumag // *Avtomatika i telemekhanika*. 2004. № 2. pp. 179–197.

***Vitalyi R. Sobol**, PhD in Mathematics and Physics, Associate Professor, Department 804 “Probability Theory and Computer Modeling”, Moscow Aviation Institute, (NRU MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1275-0445>, e-mail: vitsobol@mail.ru

****Roman O. Torishniy**, Engineer of Department, 804 “Probability Theory and Computer Modeling”, Moscow Aviation Institute, (NRU MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9732-6247>, e-mail: arenas-26@yandex.ru



4. Ignatov A.N., Kibzun A.I. Dvuhshagovaya zadacha formirovaniya portfelya cennyh bumag iz dvuh riskovyh aktivov po veroyatnostnomu kriteriyu // *Avtomatika i telemekhanika*. 2015. № 7. P. 78–100.
5. Kan Yu.S., Kibzun A.I. *Zadachi stohasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami*. M.: Fizmatlit, 2009.
6. Barysheva A.E., Markov A.S., Micel' A.A. Ocenka VaR pri negaussovom raspredelenii dohodnostej aktivov // *Rossijskij tekhnologicheskij zhurnal*. 2020. № 8(2). pp. 67–84.
7. Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // *J. Financial Economics*. 1977. V. 5. pp. 177–188.
8. Cox J., Ingersoll J., Ross S. A Theory of the term structure of interest rate // *Econometrica*. 1985. V. 53. pp. 385–407.
9. Kan Yu.S., Sysuev A.V. O priblizhennom reshenii zadachi formirovaniya portfelya cennyh bumag s fiksirovannym dohodom // *Avtomatika i telemekhanika*. 2010. № 6. pp. 130–141.
10. Sobol' V.R., Torishnyj R.O. O gladkoj approksimacii veroyatnostnyh kriteriev v zadachah stohasticheskogo programmirovaniya // *Tr. SPIIRAN*. V. 19. № 1. 2020. pp. 180–217
11. Sobol V., Torishnyi R. Smooth approximation of probability and quantile functions: vector generalization and its applications // *Journal of Physics: Conference Series*. 1925 012034. 2021. pp. 1–10.
12. Torishnyj R.O. Programmnyj kompleks dlya analiza zadach stohasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnym kriteriem // *VKiT*. 2022. V. 19. No 5(215). pp. 3–12.

Получена 09.09.2023

Принята в печать 23.10.2023

Received 09.09.2023

Accepted 23.10.2023

◇◇◇◇◇МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ◇◇◇◇◇

УДК 004.891, 378.14

Моделирование процессов автоматизированного формирования рабочих программ

Вертешев С.М.*

Псковский государственный университет (ФГБОУ ВО ПсковГУ)
г. Псков, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6696-3086>
e-mail: verteshev@mail.ru

Воронов М.В.**

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>
e-mail: mivoronov@yandex.ru

Предлагается метод формализации учебного текста в онтологию. Предлагается сохранять передачу содержащего в тексте смысла за счет оперирования минимальными учебными элементами: определениями конкретных сущностей, описанием ее свойств, производимых действий, правил, формул и тому подобные фрагментов знаний. Представляющая учебный текст формальная структура, которую можно рассматривать как ориентированный граф, вершины которого составляют описывающие учебные элементы фреймы, обеспечивает возможность разработки моделей и алгоритмов, позволяющие эффективно решать целый ряд задач в сфере образования. Эта же структура позволяет разработать модель содержательного наполнения рабочей программы, посвященной изучению находящихся в данном учебном тексте знаний.

Ключевые слова: учебный текст, программа, содержание, онтология, граф.

Для цитаты:

Вертешев С.М., Воронов М.В. Моделирование процессов автоматизированного формирования рабочих программ // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 153–164. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130409>

***Вертешев Сергей Михайлович**, доктор технических наук, профессор, Псковский государственный университет (ФГБОУ ВО Псков ГУ), г. Псков, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6696-3086>, e-mail: verteshev@mail.ru



****Воронов Михаил Владимирович**, доктор технических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>, e-mail: mivoronov@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Знания, как отраженный результат познавательной деятельности, передаются от поколения к поколению в процессе обучения. Если обучение осуществляется в рамках некоторого учреждения, то оно осуществляется в соответствии с конкретной образовательной программой, представляющей собой набор документов, в которых определено основное содержание подлежащих освоению знаний, умений и навыков (ЗУН) и сформулированы требования к результатам обучения [1].

Основу образовательной программы составляет упорядоченная последовательность отдельных учебных дисциплин, для каждой из которых указан отводимый ресурс учебного времени, форма отчетности и ряд других параметров. В свою очередь для учебной дисциплины разрабатывается так называемая рабочая программа, служащая ориентиром для ведущих эту дисциплину преподавателей. Разработаны подлежащие к исполнению требования к структуре рабочей программы. Последняя может быть сформирована, если будут определены: последовательность освоения и содержание каждого раздела, отводимое на них учебное время и ориентиры по уровню освоения учебного материала. Несомненно, это требует высокой компетентности разработчиков и творческого отношения к такой деятельности [2, 3].

Помимо собственно разработки рабочих программ требуется их регулярная корректировка. Все эти факторы влекут за собой необходимость осуществления целого ряда бюрократических действий. Естественно поставить вопрос, решение каких вопросов при разработке рабочих программ целесообразно и возможно обеспечить с использованием вычислительной техники и имеющихся информационных технологий.

В большинстве вузов имеются информационные системы, которые ориентированы на решение задач автоматизированного формирования рабочих программ, их систематизацию и хранение, обладают удобным интерфейсом для последующего использования и корректуры рабочих программ и т.п. [4]. Однако, при этом не затрагиваются вопросы содержательного манипулирования информацией.

По своей сути учебный процесс представляет собой усвоение конкретного набора знаний, приобретение умений и навыков, причем таких, которые в перспективе в известной мере обеспечат осуществление определенной деятельности. В организационном плане учебный процесс регламентирован набором различного рода документов (законов, постановлений, приказов, стандартов, программ и т.п.). В условиях конкретного учебного заведения подготовка ведется по определенным технологиям, описанным в соответствующей образовательной программе, которая содержит: календарный учебный график, рабочие программы учебных дисциплин (модулей), оценочные и методические материалы.

Из перечня включенных в данную образовательную программу дисциплин и отводимого на их освоение объема учебного времени можно составить лишь общее представление о содержании изучаемого материала. Наиболее полные сведения об этом находится в рабочих программах. Именно они в наиболее полной мере содержат сведения о том, что, как долго и как конкретно следует изучать и осваивать.

Источниками, из которых черпается необходимая для этого информация, выступают, как правило, различного рода книги. Профессорско-преподавательский состав кафедры решает, какие разделы из каких конкретно источников подлежат изучению в рамках формируемой программы. Кстати, рабочие программы содержат список источников, на основе которых предполагается изложение преподавателем учебного материала по данной учебной дисциплине. В этой связи можно считать, что содержание рассматриваемой учебной дисциплины заключено в едином текстовом массиве, который для удобства будем называть обобщенным учебником или просто «учебником».

В данной статье делается попытка описать метод, обеспечивающий в автоматизированном режиме формирование рабочей программы данной учебной дисциплины на основе содержательной обработки подлежащих освоению знаний. Источником этих знаний является определенный массив текста, названный выше обобщенным учебником.

Учебный материал обычно изложен в виде упорядоченной последовательности ряда составляющих его разделов (частей, глав). Разделы также представляют собой последовательность еще более мелких фрагментов знаний и т.д. [5]. Предполагается, что текст учебника отображает и целостную картину деятельности обучаемого, обеспечивая ему потенциальную возможность освоения заключающихся в нем знаний как с преподавателем, так и самостоятельно [6].

Эти обстоятельства способствуют возможности представлять учебный текст в виде структуры, которую образуют самые малые находящиеся в определенных отношениях для данного изложения порции знаний и отношения между ними. Каждая такая порция, в педагогической литературе ее называют учебным элементом, представляет собой часть текста, где даны: определение конкретной сущности, описание ее свойств, действий, правил, формул и тому подобные фрагменты знаний. Выделенный учебный элемент, который несет уникальную в рамках данного текста единицу информации будем трактовать как имеющий свое имя квант знаний (KZ_i).

Исследования показывают, что каждый учебный текст может быть формализован в виде ориентированного графа, описывающего структуру содержащихся в нем представленных на естественном языке знаний [7]. Представленный в виде формальной структуры (математической модели) учебный материал обеспечивает возможность разработки моделей и алгоритмов, позволяющих эффективно решать целый ряд задач в сфере образования. В этой связи базовой является задача трансформации в формальную модель структуры представленного на естественном языке учебного текста.



2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ ЗНАНИЙ

Ставится задача: разработать метод трансформации представленного на естественном языке учебного текста в формальную знаниевую структуру.

Решение этой задачи предлагается осуществлять в ходе пошагового конструктивного процесса, каждый шаг которого заключается в выявлении и фиксации в формальной форме очередного учебного элемента и его связей с другими элементами. Этот процесс можно интерпретировать как формирование онтологии, представляющей собой формальную (математическую) модель структуры представленных в тексте знаний [8]. Выбор такого способа реализации семантических технологий обусловлен тем, что манипулирование знаниями, представленными в виде онтологий, может обеспечить проведение процедур логического вывода в автоматическом режиме [9, 10].

Поскольку онтологию можно представить в виде ориентированного графа, то далее будем пользоваться терминологией из теории графов, что позволяет более наглядно описывать процесс формирования модели.

Изложим процесс построения формальной модели представленного в вербальном виде учебного текста более детально. Пусть по мере прочтения рассматриваемого учебного текста в нем обнаруживается введение «нового», т.е. еще не введенного, кванта KZ_k . В учебных текстах при описании кванта знаний используются ранее введенные кванты знаний, в том числе и те, которые относятся к так называемым базовым (входным) знаниям, т.е. к тем, которые предполагаются известными обучаемому до начала освоения данного материала. Пусть в рассматриваемом фрагменте текста дается описание кванта KZ_k , в котором используется некоторое множество других квантов знаний $\{KZ_i, x_{ik}\}$, где x_{ik} – признак того, что квантор KZ_i непосредственно используется при описании KZ_k .

Каждому вводимому кванту знаний отвечает определенная вершина формируемого графа. Для ее формализованного описания предлагается использовать соответствующий фрейм, куда вносятся название вводимого фрагмента знаний (KZ_k), пары из $\{KZ_i, x_{ik}\}$, т.е. информация о том, какие кванты знаний использованы при описании $\{KZ_i\}$ и в каком отношении они находятся, для удобства сюда целесообразно вводить собственно фрагмент текста, описывающий квант KZ_k . Тем самым оказывается построен фрагмент формируемой модели (ее подграф)

$$\Delta G(k) = \langle \{KZ_i\}, KZ_k, \{i, k\} \rangle,$$

отображающей описание квантора знаний KZ_k и его строение. Этот фрагмент имеет характерную структуру, определенный паттерн, из которых будет построена модель рассматриваемого учебного текста в целом (см. рис.1.). Подчеркнем, в нем оказываются связанными только часть фрагментов знаний, которые использованы при введении KZ_k .

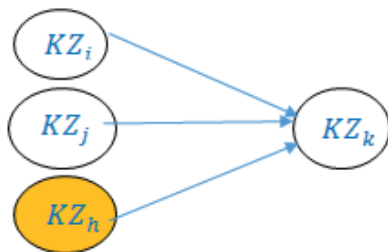


Рис. 1. Структура модели, описывающий квант знаний KZ_k

Одновременно, благодаря выявлению связей из множества $\{i, k\}$ происходит автоматическое наращивание формируемой модели

$$G(k) = G(k-1) \cup \Delta G(k),$$

поскольку $\forall i : \{KZ_i\} \subset G(k-1)$.

Примечание. Возможны ситуации, когда среди включенных в $\Delta G(k)$ есть те кванты, которые еще не вошли в $G(k-1)$ и не относятся к базовым. Это означает, что при описании KZ_k используются кванты, которые в рассматриваемом тексте еще не введены, т.е. использованы понятия, которые еще не были описаны (нарушена логика изложения), либо они вообще в данном учебнике не вводятся (неполнота излагаемого учебного материала), т.е. в учебном тексте обнаружен брак.

Для фиксации таких ситуаций можно поступать таким образом. Если при формализации кванта знаний KZ_k выявлен квант, на рис. 1. это выделенный квант KZ_h , который не присутствует в $G(k-1)$, то в $\Delta G(k)$ включается «пустая вершина». В отображающем ее фрейме фиксируется лишь имя пустого кванта KZ_h и делается соответствующая отметка. Имя каждого пустого кванта также заносится в специальный в список проблемных мест рассматриваемого учебного текста.

После рассмотрения всех n присутствующих в рассматриваемом тексте квантов знаний модель этого текста $G(n)$ оказывается сформированной.

Данная модель может быть использована для построения инструментария для решения ряда учебно-методических вопросов. Это, например, оценивание соответствующих учебников на предмет их полноты и наличия искажения логики изложения материала, а также создавать системы активной поддержки процессов самоподготовки студентов [11].

3. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ

Пусть рассматривается задача разработки модели рабочей программы изучения данной учебной дисциплины. Как уже отмечалось, разработан широкий спектр программных продуктов для формирования рабочих программ, по структуре отвечающих требованиям руководящих документов. Вместе с тем не решены вопросы



автоматического определения содержательных компонентов. Это, в первую очередь, какие темы изучать, в какой последовательности и каково отводимое на это время. По-видимому, полноценное решение такого рода вопросов под силу только опытному преподавателю, что называется «вручную». Вместе с тем наличие формальной структуры подлежащего освоению учебного материала обеспечивает построение модели, использование которой позволяет в значительной мере автоматизировать этот процесс.

Не вызывает сомнения следующее суждение: при прочих равных условиях, уровень освоения фиксированного объема знаний существенно зависит от объема, отводимого на это времени, причем, чем больше затрачивается времени на освоения данного раздела, тем выше может быть ожидаемый уровень его освоения. Однако на изучение учебной дисциплины всегда отводится ограниченный временной ресурс, обозначим его через время T . Следовательно, естественной выглядит попытка отведения на изучение каждого фрагмента знаний наибольшего объема учебного времени в рамках, отводимых учебных часов на данную дисциплину в целом.

Предположим, что для каждого фрагмента учебного материала на основе анализа опыта преподавания данной учебной дисциплины построены функции, описывающие уровень освоения $W_i(t)$, в зависимости от отпущенного на это времени. Это неубывающая монотонная зависимость, качественный вид которой представлен на рис.2, где t_{0i} минимальное время, которое должно быть отпущено для освоения i -го кванта знаний на минимально допустимом уровне.

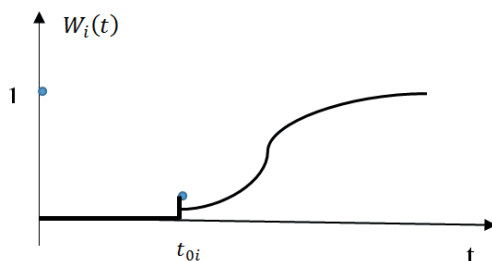


Рис. 2. Зависимость уровня освоения учебного материала как функции времени.

Пусть для выбранного учебника по вышеизложенной методике построена модель, представляющую собой онтологию, элементы которой описывают содержание упомянутые в учебнике кванты знаний и связи между ними. Кроме того, сформировано множество функций времени $\{W_i(t)\}$, описывающих ожидаемый уровень освоения каждого кванта знаний. Благодаря этому, во фреймы, описывающие квант знаний, могут быть введены так называемые исходные значения уровня его освоения W_k и отпускаемое на это учебное время. Наиболее просто это осуществить, причем в автоматическом режиме, вводя их минимальные значения, т.е. $W_k = W_k(t_{0k})$ и t_{0k} . Это означает, что для достижения минимально приемлемого уровня освоения кванта знаний KZ_k отводится время t_{0k} .



Разработка рабочей программы по учебной дисциплине с необходимостью должна быть адаптирована под удовлетворение условий по крайней мере в двух аспектах: временных и содержательных. Так, если из построенной онтологии, задающей исходное состояние объекта моделирования следует, что $\sum_{\forall k} \arg W_k(t_{0k}) > T$ и/или $\exists k : W_k < W_k(t_{0k})$, то при введенных ограничениях удовлетворительный вариант рабочей программ не может быть разработан. В противном случае имеет смысл поставить вопрос о разработке рабочей программы, обеспечивающей более высокий уровень освоения.

Естественно потребовать, чтобы за отпущенное время можно было обеспечить наиболее высокий уровень освоения каждого кванта знаний при гарантии достижения приемлемого уровня. Такой постановке задачи отвечает следующая математическая модель

$$\forall k: W_k \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях:

$$\sum_{\forall k} \arg W_k(t) \leq T \quad (2)$$

$$\forall k : W_k(t) \geq W_k(t_{0k}) \quad (3)$$

Задача (1–3) представляет собой задачу нелинейного программирования очень высокой размерности, что существенно ограничивает применение известных методов ее решения.

Заметим, функция $W_k(t)$ описывает уровень освоения соответствующего фрагмента программы за время t в целом. При более строгой постановке задачи целесообразно отдельно учитывать временные затраты на приобретение знаний, умений и навыков. Это приведет к необходимости вместо одной функции $W_k(t)$ формировать три функции $(W_k(t) \rightarrow (W_{3k}(t), W_{Yk}(t), W_{Hk}(t))$. Кроме того, существенно возрастет и размерность задачи.

Обсудим возможные пути практического преодоления трудностей применения традиционных методов решения такого рода задач математического программирования. Во-первых, можно использовать прием, который неявно применяется на практике: исходя из каких-то соображений (обычно основываясь на своем опыте), учебный материал курса разделяют на ряд достаточно крупных разделов и на освоение каждого из них выделяется определенный объем учебного времени (в пределе на освоение данной учебной дисциплины отводимый бюджет учебного времени попросту назначается). При этом обоснованность принятого решения существенно снижается и применение модели (1–3) становится бессмысленной.

Можно предложить и иной подход. Его суть заключается в поиске тех квантов знаний, которые представляются более важными и на их освоение выделяют больше учебного времени.



Для учебных текстов характерно использование ранее введенных квантов знаний для описания квантов последующих, лишние же фрагменты знаний в учебники обычно не вводят. Иначе говоря, все они считаются необходимыми. Но можно ли ввести на их множестве обоснованную «оценку относительной полезности»?

При анализе построенного графа $G(n)$ можно заметить, что одни и те же кванты знаний используются при введении целого ряда квантов, причем как непосредственно, так и опосредованно. Например, как следует из рис.3. квант KZ_i непосредственно используется при введении и кванта KZ_r , и кванта KZ_k , а квант KZ_j с квантом KZ_v связан лишь опосредованно через KZ_k .

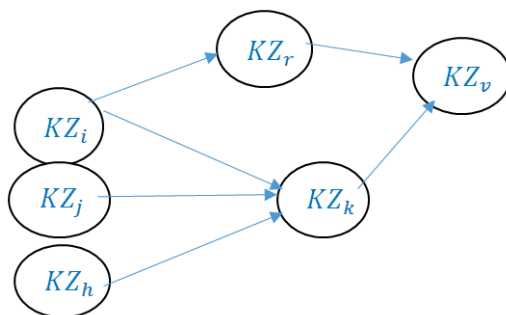


Рис. 3. Иллюстрации вариантов повторного использования одних и тех же квантов знаний

В этой связи для каждого кванта знаний KZ_k можно ввести меру оценки относительной полезности m_k , равную количеству квантов, в которых он использован непосредственно,

$$m_k = \sum_{\forall i} x_{ik} \mid x_{ik} = 1.$$

Эта мера вводится во все фреймы, описывающие введенные кванты знаний. Поскольку собственно величина m_k характеризует только часть полезности кванта, то в предыдущую модель целесообразно вводить величины $q_k = c_k \cdot m_k$, где c_k – коэффициент, который впоследствии может использоваться, как настроечный параметр

Теперь модель примет вид

$$\forall k: q_k \cdot W_k \rightarrow \max \quad (4)$$

при условиях:

$$\sum_{\forall k} \arg W_k(t) \leq T \quad (5)$$

$$\forall k: W_k(t) \geq W_k(t_{0k}) \quad (6)$$

Для некоторых квантов знаний, относительно которых есть устоявшееся мнение о достаточном уровне их освоения, можно ввести дополнительные ограничения WM_i , и ввести дополнительное условие

$$\exists i : W_i(t_{0i}) \leq W_i(t_i) \leq WM_i \quad (7)$$

Для модели (4–7) появляется возможность построить конструктивный алгоритм выделения дополнительных (относительно минимальных) временных ресурсов на освоение тех квантов знаний, которые предпочтительнее по фактору учета «мощности непосредственной связи» q_k .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенности учебных текстов обуславливают возможность построения формальных структур, отображающих их содержание в достаточной для практики степени. Наиболее подходящим их представлением являются популярные в настоящее время онтологические модели.

Разработан алгоритм формирования онтологической модели учебного текста, которая отображает присутствующие в тексте кванты знаний и связи между ними. Онтологические модели удобно представлять в виде взвешенных графов (графов знаний). Вершины этих графов целесообразно формировать в виде паттернов фреймов, в которых фиксируются сведения о квантах знаний, как наиболее малых порциях содержательной информации.

Наличие формальной модели учебного текста обеспечивает возможность решения целого ряда задач с автоматизированным учетом содержания текста. Среди них, в частности, оценка ряда качеств учебных текстов и формирование рабочих программ изучения учебных дисциплин в процессе решения соответствующих задач математического программирования.

Литература

1. Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 04.08.2023) «Об образовании в Российской Федерации» (с изм. и доп., вступ. в силу с 01.09.2023)
2. *Вертешев С.М., Поляков А.О.* От «фон Неймановского компьютера к мегамашине. – Псков: Псковский государственный политехнический институт, 2009. 512 с.
3. *Вертешев С.М., Воронов М.В., Герасименко, П.В., Кремков, М.В.* Принятие решений при управлении организационными системами: монография.–Псков: Псковский государственный университет, 2019. 218с.
4. *Космачёва И.М., Квятковская И.Ю., Сибикина И.В.* Автоматизированная система формирования рабочих программ учебных дисциплин // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика, 2016, № 1. С. 90–97.
5. *Сабина А.А.* Учебный текст: структура и прагматика. // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2009; С. 222–225.
6. *Гурье Л.И.* Проектирование педагогических систем: Учеб. пособие; Казан. гос. технол. ун-т. – Казань, 2004. 212с.
7. *Воронов М.В., Пименов В.И.* Формализация регулятивных текстов. // Информатика и автоматизация. 2021; 20(3). С. 562–590.



8. *Воронов М.В.* Моделирование структуры представленных в учебных текстах знаний // Педагогика информатики 2022, № 1–2. С.99–108.
9. *Копайгородский А.Н.* Применение онтологий в семантических информационных сетях // Онтология проектирования, 4(14)/2014. С. 78–89
10. *Надеждин Е.Н.* Прикладные задачи семантического анализа текстовых документов // Фундаментальные исследования. 2017. № 1. С. 94–100.
11. *Воронов М.В.* Система активной поддержки самоподготовки студентов // Образовательные технологии 2018. № 3. С. 107–118.



Modeling Processes for Automated Generation of Work Programs

Sergey M. Verteshev *

Pskov State University (FSBEI HE PskovSU), Pskov, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6696-3086>

e-mail: verteshev@mail.ru

Mikhail V. Voronov **

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>

e-mail: mivoronov@yandex.ru

A method for formalizing educational text into an ontology is proposed. It is proposed to preserve the transmission of the meaning contained in the text by operating with minimal educational elements: definitions of specific entities, descriptions of its properties, actions performed, rules, formulas and similar fragments of knowledge. The formal structure representing the educational text, which can be considered as a directed graph, the vertices of which make up frames describing educational elements, provides the opportunity to develop models and algorithms that can effectively solve a number of problems in the field of education. The same structure makes it possible to develop a model of the content of a work program devoted to the study of knowledge contained in a given educational text.

Keywords: educational text, program, content, ontology, graph.

For citation:

Verteshev S.M., Voronov M.V. Modeling Processes for Automated Generation of Work Programs. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 153–164. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130409> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Federal'nyi zakon ot 29.12.2012 N 273-FZ (red. ot 04.08.2023) "Ob obrazovanii v Rossiiskoi Federatsii" (s izm. i dop., vstup. v silu s 01.09.2023)
2. Verteshev S.M., Polyakov A.O. Ot «fon Neimanovskogo komp'yutera k megamashine. – Pskov: Pskovskii gosudarstvennyi politekhnicheskii institut, 2009. 512s.
3. Verteshev S.M., Voronov M.V., Gerasimenko P.V., Kremkov, M.V. Prinyatie reshenii pri upravlenii organizatsionnymi sistemami: monografiya. – Pskov: Pskovskii gosudarstvennyi universitet, 2019. 218s.

***Sergey M. Verteshev**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Pskov State University (FSBEI HE PskovSU), Pskov, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6696-3086>, e-mail: verteshev@mail.ru

****Mikhail V. Voronov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow, Russia, State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>, e-mail: mivoronov@yandex.ru



4. Kosmacheva I.M., Kvyatkovskaya I.Yu., Sibikina I.V. Avtomatizirovannaya sistema formirovaniya rabochikh programm uchebnykh distsiplin // Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika, 2016, № 1. S. 90–97.
5. Sabinina A.A. Uchebnyi tekst: struktura i pragmatika. // Izvestiya RGPU im. A.I. Gertsena. 2009; S. 222–225.
6. Gur'e L.I. Proektirovanie pedagogicheskikh sistem: Ucheb. posobie; Kazan. gos. tekhnol. un-t.–Kazan', 2004. 212s.
7. Voronov M.V., Pimenov V.I. Formalizatsiya regulativnykh tekstov. // Informatika i avtomatizatsiya. 2021; 20(3). S. 562–590.
8. Voronov M.V. Modelirovanie struktury predstavlennykh v uchebnykh tekstakh znanii // Pedagogika informatiki 2022, № 1–2. S. 99–108.
9. Kopaigorodskii A.N. Primenenie ontologii v semanticheskikh informatsionnykh setyakh // Ontologiya proektirovaniya, 4(14)/2014. – S. 78–89
10. Nadezhdin E.N. Prikladnye zadachi semanticheskogo analiza tekstovykh dokumentov // Fundamental'nye issledovaniya. 2017. № 1. S. 94–100.
11. Voronov M.V. Sistema aktivnoi podderzhki samopodgotovki studentov // Obrazovatel'nye tekhnologii 2018. № 3. S. 107–118.

Получена 24.11.2023

Принята в печать 04.12.2023

Received 24.11.2023

Accepted 04.12.2023

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 371.851

**Моделирование длительности
жизни выдающихся ученых математиков,
родившихся в 20 веке в СССР и в странах мира**

Герасименко П.В. *

Петербургский государственный университет путей сообщения

Императора Александра I (ФГБОУ ВО ПГУПС)

г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7546-661X>

e-mail: pv39@mail.ru

Ходаковский В.А. **

Петербургский государственный университет путей сообщения

Императора Александра I (ФГБОУ ВО ПГУПС)

г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2060-4560>

e-mail: hval104@mail.ru

Выполнено математическое моделирование и проведена сравнительная оценка долголетия, рожденных в 20-м столетии известных ученых-математиков СССР и стран мира, активная жизнь которых длилась в период существования СССР. Для моделирования сформирована выборка статистических данных, на основании которой построены таблицы частот и функция распределения вероятности смерти ученых-математиков, рожденных и работавших в СССР и в странах мира. Моделирование осуществлено с помощью полиномиальных функций инструментом «Регрессия» ППП Excel. Осуществлен сравнение функций распределения вероятности смерти известных ученых-математиков СССР и ученых-математиков, проживавших в разных странах мира в период существования СССР.

Ключевые слова: Ученые математики, модель, вероятность, возраст, показатель прожития.

Для цитаты:

Герасименко П.В., Ходаковский В.А. Моделирование длительности жизни выдающихся ученых математиков, родившихся в 20 веке в СССР и в странах мира // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 165–175. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130410>



***Герасименко Петр Васильевич**, доктор технических наук, профессор кафедры экономика транспорта, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ФГБОУ ВО СПГУПС), г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0777-1111>, e-mail: pv39@mail.ru

****Ходаковский Валентин Аветикович**, доктор технических наук, профессор кафедры Информатики и защиты информации, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I (ФГБОУ ВО ПГУПС), г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, МГППУ), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2060-4560>. e-mail: hva1104@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно в геронтологии смерть человека, а соответственно и продолжительность жизни человека, определяется предельной временной точкой процесса старения. Вместе с тем, как показали исследования, на продолжительность жизни человека оказывает влияние кроме генетических факторов также место проживания в горной местности или на равнине, уровень доходов, доступность медицинской помощи, образование, профессия, социально-экономический статус, творческий характер жизни, достигнутый интеллект и др. [1]. Влияние ряда из названных факторов освещены в работах [1–6].

Многолетние научные исследования показывают, что причина долгой жизни обусловлена условиями и образом жизни. Она составляет три четвертых всех процентов и только одна четвертая оставшиеся часть процентов заложены в генах. Полагают, что если человеку будут обеспечены оптимальные жизненные условия, влияющие на долголетие, то он будет иметь возможность максимально увеличить продолжительность жизни в отведенных ему биологией пределах [7]. Очевидно, что годы войн нарушают нормальные жизненные условия и ускоряют старения, а соответственно снижают длительности жизни человека.

Цель настоящей работы направлена на изучение влияния различных факторов на процесс старения у творческих людей Советского Союза, живших в условиях войн и проживших более шестидесяти лет. Исследованию подвергались ученые, которые сформировались и достигли выдающихся научных успехов в области математики. Одновременно сравнивалась продолжительность их жизни с длительностью прожития выдающихся ученых-математиков других стран, которые проживали в период существования СССР.

Как известно опыт последних столетий наглядно показывает, сколь велико значение математики в мировом развитии. Одновременно известно, что для математиков характерен свой особый режим труда, не связанный с временем суток. Дополнительно исследованиями установлено, что высокий интеллект, свойственный выдающимся ученым-математикам, способствует большей продолжительности жизни и долголетию [8, 9].

Родившиеся в начале 20-го века многие выдающиеся математики СССР с первых дней войны принимали участие в защите страны: призывались в армию, записывались в народное ополчение, шли на фронт добровольцами. Нелегкая доля досталась многим из них. Все, чья жизнь была сохранена, как в гражданскую, так



в Великую Отечественную войну, продолжили учебу и совершенствовали свои знания, добиваясь в смертельных условиях новых научных результатов мирового уровня. Достижения ученых-математиков в области военной техники являются значимой частью победы в войне.

Необходимо отметить, что в период Великой Отечественной войны техника требовала совершенных математических расчетов. Прежде всего это необходимо было для увеличения скорости полета самолетов не только за счет повышения мощности двигателей, но и выбора оптимального профиля фюзеляжа и крыльев. Решения многих математических вопросов позволило достичь блестящих результатов в совершенствовании боевых самолетов: А.С. Яковлеву и С.А. Лавочкину создать грозные истребители, С.В. Ильюшину – неуязвимые штурмовики, А.Н. Туполеву и Н.Н. Поликарпову – мощные бомбардировщики.

Выдающийся советский математик М.В. Келдыш и возглавляемый им коллектив ученых исследовали опасные явления, возникающих при маневрах самолетов, что позволило советской авиационной науке своевременно защитить конструкции скоростных самолетов от появления опасных вибраций.

А.Н. Крылову, чьи труды легли в основу математической теории непотопляемости и качки кораблей, позволившие использовать в нашем Военно-морском флоте корабли с высокой живучестью.

Теория функции действительного переменного и аксиоматика теории вероятностей академика С.Н. Бернштейна позволила рассчитать таблицы для определения местонахождения судна по радиопеленгам, что дало возможность ускорить штурманские расчеты во много раз.

Член – корреспондент АН СССР Н.Г. Четаев в результате решения сложной математической задачи определил оптимальную крутизну нарезки стволов орудия, что позволило обеспечивать максимальную кучность боя.

Один из крупнейших наших математиков, академик А.Н. Колмогоров, используя свои работы по теории вероятности, разработал теорию минимального рассеивания артиллерийских снарядов.

Приведенные примеры можно продолжить, однако для этого потребуется осветить дела всех выдающихся ученых-математиков СССР, которые представлены в табл. 1 в качестве выборки для проведения исследования. Следует отметить, что выборка построена по данным «Библиографического словаря» [10], которые дополнялись данными о смерти тех ученых в выборке, чья жизнь завершилась после издания словаря.

Таблица 1

Выборка ученых-математиков СССР, проживших более 60-и лет

ФИО	год рожд.	лет	ФИО	год рожд.	лет
Бари Н.К.	1901	60	Мисюркеев И.В.	1917	79
Морозов В.В.	1910	60	Рвачев В.Л.	1926	79
Ширшов А.И.	1921	60	Векуа Н.П.	1913	80
Венков Б.А.	1900	62	Лаврентьев М.А.	1900	80



ФИО	год рожд.	лет	ФИО	год рожд.	лет
Гельфанд А.О.	1906	62	Мергелян С.Н.	1928	80
Ляпунов А.А.	1911	62	Понтрягин Л.С.	1908	80
Фильчаков П.Ф.	1916	62	Лаврентьев М.А.	1900	80
Белоусов В.А.	1925	63	Бирман М.Ш.	1928	81
Курош А.Г.	1908	63	Гончар А.А.	1931	81
Яненко Н.Н.	1921	63	Ильин А.М.	1932	81
Гаврилов Г.П.	1935	64	Соболев С.Л.	1908	81
Михалевич В.С.	1930	64	Ибрагимов И.И.	1912	82
Маркушевич А.И.	1908	65	Крейн М.Г.	1907	82
Матросов В.Л.	1950	65	Розов Н.Х.	1938	82
Суворов Г.Д.	1919	65	Фадеев Д.К.	1907	82
Кибель И.А.	1904	66	Гнеденко Б.В.	1912	83
Смирнов Н.В.	1900	66	Голод Е.С.	1935	83
Богданов Ю.С.	1920	67	Еругин Н.П.	1907	83
Гихман И.И.	1918	67	Погорелов А.В.	1919	83
Келдыш М.В.	1911	67	Фадеев Л.Д.	1934	83
Немыцкий В.В.	1900	67	Дородницын А.А.	1910	84
Скопец З.А.	1917	67	Иванов В.К.	1908	84
Уваров В.Б.	1929	68	Коваленко И.Н.	1935	84
Векуа И.Н.	1907	70	Колмогоров А.Н.	1903	84
Зубов В.И.	1930	70	Охоцимский Д.Е.	1921	84
Леоньев А.Ф.	1917	70	Прохоров Ю.В.	1929	84
Виленкин Н.Я.	1920	71	Гробман Д.М.	1922	85
Демидович Б.П.	1906	71	Ефремович В.А.	1903	86
Кострикин А.И.	1929	71	Ильин В.А.	1928	86
Лозинский С.М.	1914	71	Манин Ю.И.	1937	86
Сретенский Л.Н.	1902	71	Русак В.Н.	1936	86
Ефимов Н.В.	1910	72	Александров А.Д.	1912	87
Куклес И.С.	1905	72	Куликов Л.Я.	1914	87
Лебедев С.А.	1902	72	Тихонов А.Н.	1906	87
Петровский И.Г.	1901	72	Юдин Д.Б.	1919	87
Прудников А.П.	1927	72	Красовский Н.Н.	1924	88
Харламов С.А.	1937	72	Марчук Г.И.	1925	88
Арнольд В.И.	1937	73	Мищенко Е.Ф.	1922	88
Боревич З.И.	1922	73	Владимиров В.С.	1923	89
Вагнер В.В.	1908	73	Кабулов В.К.	1921	89
Витушкин А.Г.	1931	73	Михайлов Л.Г.	1928	89
Боярчук А.К.	1925	74	Норден А.П.	1904	89
Гахов Ф.Д.	1906	74	Самарский А.А.	1919	89
Бицадзе	1916	78	Белоцерковский О.М.	1925	90
Лифанов И.К.	1942	74	Левитан Б.М.	1914	90
Моисеев Е.И.	1948	74	Бессонов Л.А.	1915	91
Новиков П.С.	1901	74	Митропольский Ю.А.	1917	91



ФИО	год рожд.	лет	ФИО	год рожд.	лет
Яблонский С.В.	1924	74	Розенфельд Б.А.	1917	91
Лопатинский Я.Б.	1906	75	Рыбников К.А.	1913	91
Черников С.Н.	1912	75	Седов Л.А.	1907	92
Джрбашян М.М.	1918	76	Годунов С.К.	1929	93
Ландис Е.М.	1921	76	Козлов В.Я.	1914	93
Марков младший) А.А.	1903	76	Болтянский В.Г.	1925	94
Рашевский П.К.	1907	76	Шафаревич И.Р.	1923	94
Диткин В.А.	1910	77	Гельфанд И.М.	1913	96
Ефимов А.В.	1924	77	Никольский С.М.	1905	107

К сожалению, имена многих ученых математиков не вошли в данную выборку, так как их жизнь завершилась в годы войны или ранее 60 лет. Страна помнит и ежегодно отдает должное своему народу, которые отдали свою жизнь во имя независимости, свободы и общественных идеалов. В их числе и воины, которые в мирное довоенное время сформировались как ученые математики.

Необходимо отметить огромный вклад, который внесли в создание и развитие математической науки ученые многих других стран. В табл. 2 для сравнения приведена выборка выдающихся ученых-математиков, которые родились и развивали математическую науку во многих странах в период существования СССР. Для формирования выборки использованы статистических данных ученых-математиков, представленные в [11].

Таблица 2

Выборка ученых-математиков народов мира, проживших более 60-и лет

ФИО	год рожд.	лет	ФИО	год рожд.	лет
Суй, Пао-лу,	1910	60	Кодаира, Кунихико,	1915	82
Бучи, Дж. Ричард,	1924	60	Зайдель, Яап Дж.,	1919	82
Сузуки, Сатоши,	1930	61	Менгер, Карл,	1902	83
Давенпорт, Гарольд,	1907	62	Магнус, Вильгельм,	1907	83
Моцкин, Теодор С.,	1908	62	Эрдеш, Пауль,	1913	83
Райнер, Ирвинг,	1924	62	Джон, Фриц,	1910	84
Альмгрен, Фредерик Дж.,	1933	64	Хирцебрух, Фридрих,	1928	84
Туран, Пол,	1910	66	Эйленберг, Самуэль	1913	85
Робинсон, Джулия,	1919	66	Тьюки, Джон Уайлдер,	1915	85
Альберт, Авраам Адриан,	1905	67	Тутте, В. Т.,	1917	85
Мойсил, Григоре К.,	1906	67	Моришима, Таро,	1903	86
Хайльбронн, Ганс	1908	67	Лемер, Деррик Генри,	1905	86
Обер, Карл Эгиль,	1924	67	Куреп, Дуро,	1907	86
Адамс, Джон Франк,	1930	67	Роббинс, Герберт,	1915	86
Рота, Джан-Карло,	1932	67	Клингенберг, Вильгельм,	1924	86
Юнгрен, Вильгельм,	1905	68	Мандельброт, Бенуа,	1924	86
Ауслендер, Морис,	1926	68	де Рам, Жорж,	1903	87



ФИО	год рожд.	лет	ФИО	год рожд.	лет
Кац, Марк,	1914	70	Орлич, Владислав,	1903	87
Кокран, Уильям Геммель,	1909	71	Шенберг, И. Дж.,	1903	87
Гёдель, Курт,	1906	72	Чоула, Сарвадман,	1907	88
Бинг, Р. Х.,	1914	72	Альфорт, Ларс Валериан,	1907	89
Ланг, Серж,	1927	72	Инкери, Кустаа Адольф,	1908	89
Амишур, С.А.	1921	73	Джейкобсон, Натан,	1910	89
Эресманн, Чарльз,	1905	74	Дилворт, Роберт Палмер,	1914	89
Улам, Станислав М.,	1909	75	Каплански, Ирвинг,	1917	89
Хуа, Ло-кенг,	1910	75	Халмос, Пол Р.	1916	90
Брауэр, Ричард,	1901	76	Сельберг, Атле,	1917	90
Кендалл, Морис Джордж,	1907	76	Лере, Жан,	1906	92
Атья, Майкл Фрэнсис,	1929	76	Вайль, Андре,	1906	92
Борсук Кароль,	1905	77	Куайн, Уиллард Ван	1908	92
Хёфдинг, Василий,	1914	77	Бартлетт, Морис Стивенсон,	1910	92
Холл, Филипп,	1904	78	Стейнберг, Роберт,	1922	92
Берс, Липман,	1914	79	ван дер Варден, Б.Л.	1903	93
Витт, Эрнст,	1911	80	Черн, Шиинг-Шэнь,	1911	93
Пятецкий-Шапиро Илья,	1929	80	Какутани, Шизуо,	1911	93
Хопф, Эберхард,	1902	81	Кокстер, Гарольд Скотт	1907	96
Ботт, Рауль,	1924	81	Мак-Лейн, Сондерс,	1909	96
Грауэрт, Ганс,	1930	81	Гельфанд Израиль	1913	96
Тарский, Альфред,	1901	82	Борель, Арман,	1923	97
			Картан, Анри,	1904	104

На основании численного состава каждой выборки выдающихся ученых-математиков построена таблица частот смертности. В таблице смертности указаны количество умерших из общего числа ученых, представленных в выборках, за интервал прожития в один год.

Таблица 3

**Таблица смертности ученых, согласно
выборок табл. 1 (СССР) и табл. 2 (МИР)**

№ п.п.	Возраст ученого	Количество умерших		№ п.п.	Возраст ученого	Количество умерших		№ п.п.	Возраст ученого	Количество умерших	
		СССР	МИР			СССР	МИР			СССР	МИР
1	60	3	2	14	73	4	2	27	86	4	6
2	61	0	1	15	74	6	2	28	87	4	3
3	62	4	3	16	75	2	3	29	88	3	1
4	63	3	0	17	76	4	3	30	89	5	5
5	64	2	1	18	77	2	2	31	90	2	3
6	65	5	0	19	78	1	1	32	91	4	0
7	66	3	2	20	79	2	1	33	92	1	5



№ п.п.	Возраст ученого	Количество умерших		№ п.п.	Возраст ученого	Количество умерших		№ п.п.	Возраст ученого	Количество умерших	
		СССР	МИР			СССР	МИР			СССР	МИР
8	67	5	6	21	80	5	2	34	93	2	3
9	68	1	2	22	81	4	3	35	94	2	1
10	69	0	0	23	82	4	3	36	95	0	0
11	70	3	1	24	83	5	3	37	96	1	3
12	71	5	1	25	84	6	2	38	97	0	1
13	72	6	3	26	85	1	3	39	98	0	0

Эта таблица рассматривается как модель процесса вымирания ученых, которые содержатся в рассматриваемых выборках выдающихся математиков. Из таблицы смертности получены коэффициенты смертности, которые представляют дискретные значения относительного количества (частоты) смертей или приближенные значения вероятности смерти в заданный год прожития. Под вероятностью смерти понимается вероятность события, что если ученый вступил в определенный возрастной интервал лет, то он доживет только до его верхней границы. На основании значений коэффициентов смертности получены дискретные математические законы – функции распределения вероятностей. В дальнейшем дискретные законы преобразованы в непрерывные законы распределения.

Таким образом, для более качественного проведения сравнения длительности жизни ученых вместо дискретного времени использованы непрерывное время смерти, а вместо функции распределения вероятности дискретной случайной величины функция распределения вероятности непрерывной случайной величины.

Принятая непрерывная функция распределения позволяет определить вероятности того, что ученый доживёт до некоторого заданного возраста x лет, где x – действительное непрерывное число, характеризующее возраст прожития [12].

В качестве моделей длительности активной жизни ученых математиков в работе построены непрерывные полиномиальные функции распределения вероятности прожития. Область задания в работе ограничена принятым в работе интервалом значений лет прожития, а именно от шестидесяти до ста лет.

Графики непрерывных функций распределения вероятности смерти ученых математиков, представляющие собой кривые распределения вероятности прожития, ее выражение и коэффициент детерминации, представлен на рис. 1. Функция построена по данным табл.3. с помощью метода наименьших квадратов.

Используя законы распределения вероятности смерти вычислена разность между вероятностями длительности жизни двух коллективов (выборок) ученых, из которых математики СССР проживали в значительно более сложных условиях по сравнению с математиками других стран мира. На рис. 2 представлены превышения вероятностей смерти в процентах. Из представленных значений на рис. 2 следует, что вероятность смерти в рассматриваемой год прожития от семидесяти до девяноста трех лет у коллектива выдающихся ученых-математиков СССР несколько выше.

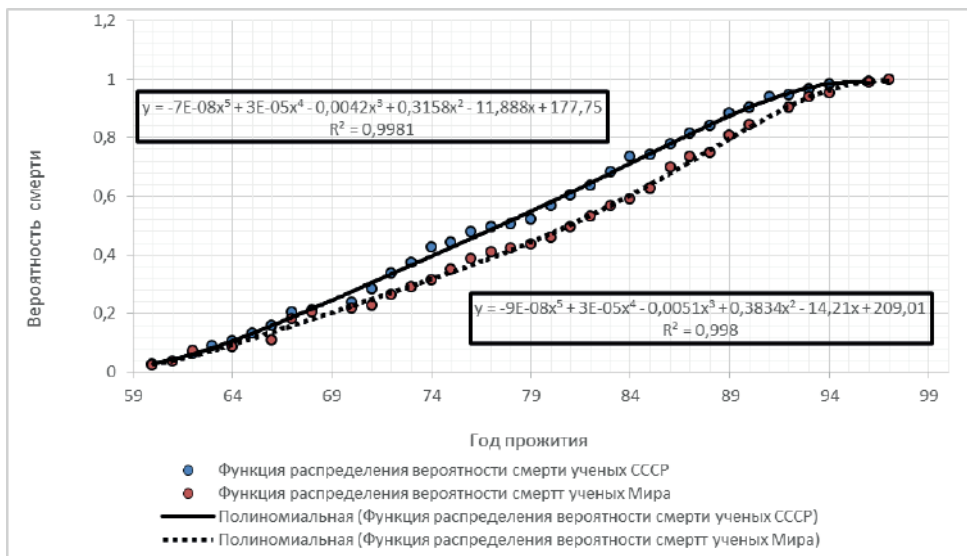


Рис. 1. Функция распределения вероятности смерти от года прожития

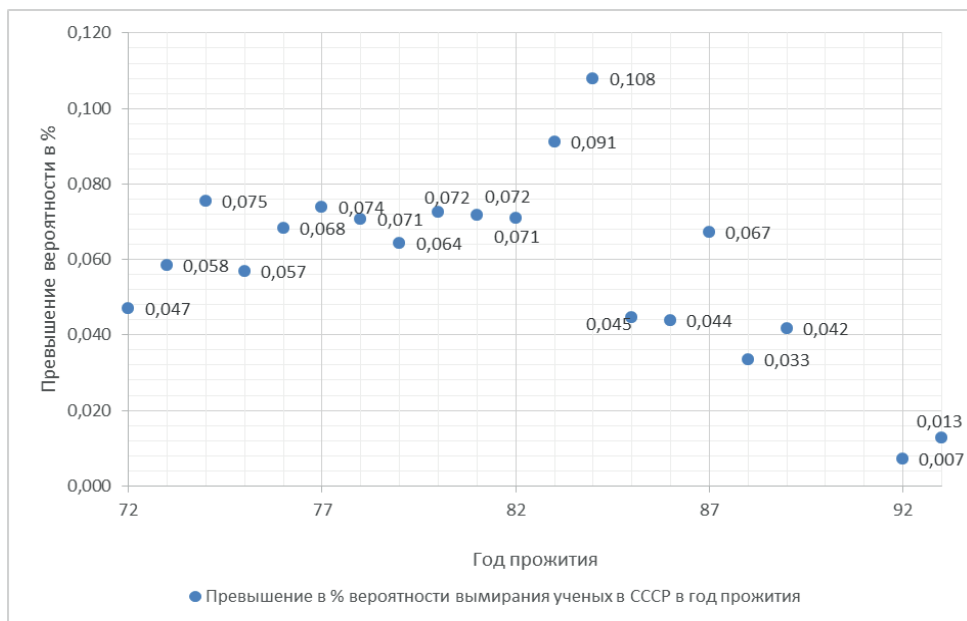


Рис. 2. Превышение вероятности смерти ученых-математиков СССР над учеными других стран в %

Наибольшее превышение вероятности смерти возникает в районе 84 лет и составляет до 0,1 %. Такое незначительное расхождение можно предположительно



объяснить созданием в СССР, даже в тяжелые военные и в послевоенные годы, приемлемых условий для творческой активной жизни выдающихся ученых математиков. Другими словами, условия жизни и работы в военные и послевоенные годы оказали незначительное снижение длительности жизни выдающихся ученых-математиков СССР. Что касается влияния самой интеллектуальной деятельности на срок жизни ученых СССР и ученых стран мира, то можно полагать, что она была равнозначной.

Литература

1. *Гаврилов Н.А., Гаврилова Н.С.* Биология продолжительности жизни / Отв. ред. В.П. Скулачев – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. *Анисимов В.Н.* Молекулярные и физиологические механизмы старения: [в 2 т.] / 2-е изд., перераб. и доп. СПб: Наука, 2008. Т. 1. – 481 с.; Т.2. – 434 с.
3. *Анисимов В.Н.* Синдром ускоренного старения при воздействии канцерогенных факторов окружающей среды // Рос. физиол. журн. 2010. Т. 96. № 8. С. 817–833.
4. *Пучкова Е.И., Алишев Н.В.* Показатели биологического возраста и ускоренное старение у ликвидаторов последствий радиационных аварий // Усп. геронтол. 2011. Т. 24. № 1. С. 99–104.
5. *Анисимов В.Н., Михальский А.И.* Старее ли Нобелевский лауреат? Математический анализ возраста продолжительности жизни лауреатов Нобелевской премии за 1901–2003 гг. // Усп. геронтол. 2004. Т. 15. С. 14–22.
6. *Берёзкин В.Г., Буляница А.Л.* О некоторых демографических характеристиках членов Российской академии наук в XX в. // Усп. геронтол. 2007. Т. 20. № 1. С. 29–39.
7. *Жаринов Г.М., Анисимов В.Н.* Продолжительность жизни, долгожительство и некоторые причины смерти у литераторов разных жанров // Усп. геронтол. 2016. Т. 29. № 2. С. 210–217.
8. *Анисимов В.Н., Жаринов Г.М.* Средний возраст смерти и долгожительство мужчин-ученых различных специальностей // Вестн. моск. ун-та. сер.16. Биология. 2016. № 4. 12–18.
9. Правила долголетия. Результаты крупнейшего исследования долгожителей: <http://belibra.ru/Pravila-dolgolyetiya-Ryezuljttaty-krupnyeyishyego-isslyedovaniya-dolgozhityelyeyi.html> (дата обращения: 12.10.2021).
10. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Биографический словарь деятелей в области математики. / Пер. с укр. – К.: Радянська школа, 1979. – 680 с.
11. Collected Works in Mathematics and Statistics: <https://www.mscs.dal.ca/~dilcher/collwks.html#top> (дата обращения: 13.09.2021).
12. *Герасименко П.В.* Сравнительный анализ активной жизни выдающихся ученых-математиков, рожденных в разные столетия. // Известия Петербургского университета путей сообщения. – СПб.: ПГУПС, 2022. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 105–115.



Simulation of the Life Outstanding Scientific Mathematics Born in the 20th Century in the USSR and in the Countries of the World

Petr V. Gerasimenko*

Emperor Alexander I st. Petersburg State Transport University (PSTU)

Saint Petersburg, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7546-661X>

e-mail: pv39@mail.ru

Valentin A. Khodakovsky**

Emperor Alexander I st. Petersburg State Transport University (PSTU)

Saint Petersburg, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2060-4560>

e-mail: hva1104@mail.ru

Mathematical modeling was carried out and a comparative assessment of the life expectancy of famous mathematicians born in the 20th century in the USSR and the countries of the world. It was taken into account that their active life lasted only during the existence of the USSR. For modeling, a sample of statistical data has been formed, on the basis of which the frequency tables and the distribution of the probability of death of scientists-mathematicians born and worked in the USSR and in the countries of the world are built. Modeling was carried out using polynomial functions with the “regression” tool of the Excel PPP. A comparison of the distribution of the probability of the death of famous scientists-mathematicians of the USSR and mathematician scientists who lived in different countries of the world during the existence of the USSR was carried out.

Keywords: scientist’s mathematicians, model, probability, age, livelihood

For citation:

Gerasimenko P.V., Khodakovsky V.A. Simulation of the Life Outstanding Scientific Mathematics Born in the 20th Century in the USSR and in the Countries of the World.

Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 165–175. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130410> (In Russ.,abstr. in Engl.).

****Petr V. Gerasimenko***, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Transport Economics, Emperor Alexander I st. Petersburg State Transport University (PSTU), Saint Petersburg, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7546-661X>, e-mail: pv39@mail.ru

*****Valentin A. Khodakovsky***, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Informatics and Information Security, Emperor Alexander I st. Petersburg State Transport University (PSTU), Saint Petersburg, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2060-4560>. e-mail: hva1104@mail.ru



References

1. Gavrilov N.A., Gavrilova N.S. *Biologiya prodolzhitel'nosti zhizni* / Otv. red. V.P. Skulachev – 2-e izd., pererab. i dop. M.: Nauka, 1991. – 280 s.
2. Anisimov V.N. *Molekulyarnye i fiziologicheskie mekhanizmy stareniya: [v 2 t.] / 2-e izd., pererab. i dop.* SPb: Nauka, 2008. T. 1. – 481 s.; T.2. – 434 s.
3. Anisimov V.N. *Sindrom uskorenogo stareniya pri vozdejstvii kancerogennyh faktorov okruzhayushchej sredy* // Ros. fiziol. zhurn. 2010. T. 96. № 8. S. 817–833.
4. Puchkova E.I., Alishev N.V. *Pokazateli biologicheskogo vozrasta i uskorennoe starenie u likvidatorov posledstvij radiacionnyh avarij* // Usp. gerontol. 2011. T. 24. № 1. S. 99–104.
5. Anisimov V.N., Mihal'skij A.I. *Stareet li Nobelevskij laureat? Matematicheskij analiz vozrasta prodolzhitel'nosti zhizni laureatov Nobelevskoj premii za 1901–2003 gg.* // Usp. gerontol. 2004. T. 15. S. 14–22.
6. Beryozkin V.G., Bulyanica A.L. *O nekotoryh demograficheskikh harakteristikah chlenov Rossijskoj akademii nauk v HKH v.* // Usp. gerontol. 2007. T. 20. № 1. S. 29–39.
7. ZHarinov G.M., Anisimov V.N. *Prodolzhitel'nost' zhizni, dolgozhitel'stvo i nekotorye prichiny smerti u literatorov raznyh zhanrov* // Usp. gerontol. 2016. T. 29. № 2. S. 210–217.
8. Anisimov V.N., ZHarinov G.M. *Srednij vozrast smerti i dolgozhitel'stvo muzhchin-uchenyh razlichnyh special'nostej* // Vestn. mosk. un-ta. ser.16. *Biologiya*. 2016. № 4. 12–18.
9. *Pravila dolgoletiya. Rezul'taty krupneshogo issledovaniya dolgozhitelej*: <http://belibra.ru/Pravila-dolgolyetiya-Ryezuljttaty-krupnyeyishyego-isslyedovaniya-dolgozhityelyeyi.html> (data obrashcheniya: 12.10.2021).
10. Borodin A.I., Bugaj A.S. *Biograficheskij slovar' deyatelej v oblasti matematiki.* / Per. s ukr. – K.: Radyans'ka shkola, 1979. – 680 s.
11. *Collected Works in Mathematics and Statistics*: <https://www.mscs.dal.ca/~dilcher/collwks.html#top> (data obrashcheniya: 13.09.2021).
12. Gerasimenko P.V. *Sravnitel'nyj analiz aktivnoj zhizni vydayushchihsya uchenyh-matematikov, rozhdennyh v raznye stoletiya.* // *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putej soobshcheniya.* – SPb.: PGUPS, 2022. – T. 19. – Vyp. 1. – S. 105–115.

Получена 09.09.2023

Принята в печать 20.10.2023

Received 09.09.2023

Accepted 20.10.2023

Дискриминантный анализ на основе статистик Кохонена

Комаров И.В.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6848-5977>
e-mail: busykomarov@gmail.com

Куравский Л.С.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>
e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

В статье приводится описание нового подхода к дискриминантному анализу, опирающемуся на нейросети Т. Кохонена. Рассматривается алгоритм анализа и его преимущества.

Ключевые слова: дискриминантный анализ, самоорганизующиеся карты Кохонена.

Для цитаты:

Комаров И.В., Куравский Л.С. Дискриминантный анализ на основе статистик Кохонена // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 4. С. 176–182. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130411>

***Комаров Иван Владимирович**, студент факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6848-5977>, e-mail: busykomarov@gmail.com

****Куравский Лев Семенович**, доктор технических наук, декан факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

В современных методах многомерного анализа данных дискриминантный анализ занимает важное место, представляя собой эффективное средство для решения задач классификации. Определение межгрупповых различий помогает выяснить, насколько эффективно набор используемых переменных способен разделять объекты обучающей выборки, и какие из этих переменных обладают наибольшей информативностью, что является одной из задач, решаемых средствами дискриминантного анализа. В данной работе речь пойдет о другой задаче – предсказании значений группирующего фактора для исследуемой группы наблюдений.

Несмотря на свою популярность, традиционные методы дискриминантного анализа несовершенны из-за существования в алгоритме их работы ограничений, обусловленных известными предположениями. Одно из них заключается в том, что исходные данные для получения корректного результата должны описываться многомерным нормальным распределением, что может стать препятствием при работе с реальными наблюдениями. Стоит также отметить чувствительность анализа к выбросам: единичные аномалии или ошибки измерения могут значительно повлиять на оценки и результаты классификации.

2. КАРТЫ КОХОНЕНА

Самоорганизующаяся карта Кохонена (Self-Organizing Map – SOM) представляет собой нейронную сеть без учителя, предназначенную для визуализации и кластеризации данных. Эта структура, предложенная финским ученым Т. Кохоненом в 1982 году, используется для проецирования многомерных данных в пространство более низкой размерности, чаще всего двумерное. SOM также применяется для решения задач моделирования, прогнозирования, выявления наборов независимых признаков и поиска закономерностей в больших объемах данных. В своем основном варианте SOM создает граф подобия входных данных.

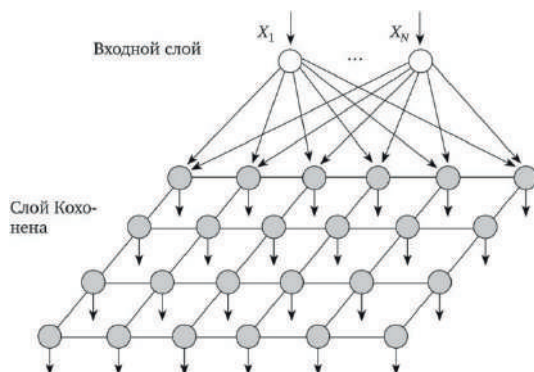


Рис. 1. Структура самоорганизующейся карты Кохонена



Карта представляет собой сетку из узлов, которые соединены между собой связями. Сетка может быть прямоугольной или гексагональной формы. Также определяется количество нейронов в сети. Каждый узел описывается двумя векторами. Первый вектор – вектор веса, имеет такую же размерность, что и входные многомерные данные. Второй вектор – координаты узла на карте. Перед началом обучения необходимо инициализировать весовые коэффициенты нейронов. Затем для каждого входного образца происходит поиск ближайшего нейрона на основе Евклидова расстояния между векторами весов нейрона и входным образцом. Выбранный нейрон и его соседи на карте проходят через процесс обновления весов. Веса нейрона и его соседей изменяются с целью приближения к входному образцу. Это позволяет картам перестраиваться и адаптироваться к статистическим свойствам входных данных. В процессе обновления весов используются два основных механизма: конкуренция и кооперация. Конкуренция заключается в выборе победившего нейрона, который наиболее близок к входному образцу. Кооперация проявляется в том, что веса победившего нейрона и его соседей обновляются в направлении входного образца. Этот процесс обновления весов повторяется для всех входных образцов в несколько итераций. По мере обучения сетки происходит снижение ошибки и улучшение качества представления данных на карте. По завершению обучения, каждый нейрон на карте будет представлять определенный класс или категорию, а распределение нейронов на карте будет отражать статистическую структуру данных.

3. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Для наглядного представления этапов дискриминантного анализа и их изменений приведены блок-схемы классического и нового варианта анализа.

Суть нового подхода заключается в том, чтобы обучить для каждого имеющегося в обучающей выборке класса отдельную карту. Такой подход позволяет четко проследить, что каждая из них организуется на своих данных и какие образцы ей соответствуют. Это дает возможность проводить классификацию новых эмпирических наблюдений, опираясь на их близость к нейронам на каждой из обученных карт. Кроме того, такое разделение упрощает интерпретацию результатов и дает более понятное представление о том, как классы представлены на карте.

Выбор главного параметра – размерности карты SOM – зависит от количества объектов в обучающей выборке и количества априорно известных классов. Так как в проведенном исследовании инициализация карты происходит случайными значениями из выборки, важно иметь достаточное количество нейронов, чтобы хорошо представить структуру данных. Анализ итоговой статистики при переборе различных значений размера карты показал, что лучший результат соответствует использованию 5–12 нейронов на каждый класс. При выборе размерности карты SOM следует учитывать этот критерий, чтобы достичь баланса между адекватностью результатов анализа и ресурсоемкостью.

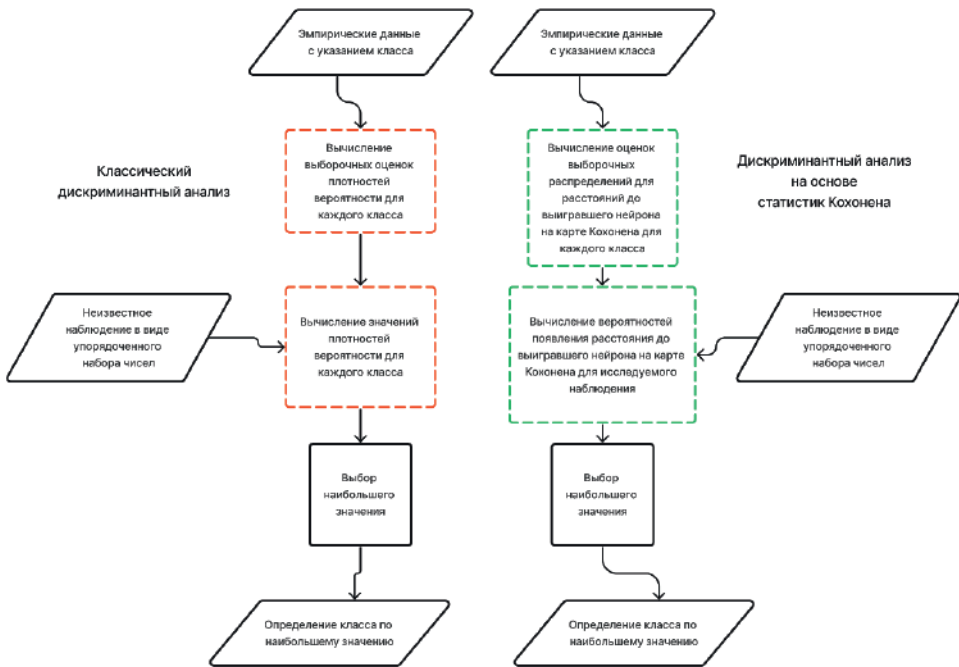


Рис. 2. Блок-схемы для классического и нового варианта дискриминантного анализа

После обучения всех карт можно перейти к определению вероятностей принадлежности объекта к конкретному классу. Для этого используется тестовая выборка значений каждого априорного класса. Для объекта тестовой выборки вычисляется евклидово расстояние до выигравшего нейрона на соответствующей этому объекту карте. После вычисления расстояний до выигравших нейронов для каждого класса на основе этих расстояний строится гистограмма. Количество её интервалов группировки определяется правилом Стёрджеса – это эмпирическое правило для определения оптимального количества интервалов, на которые следует разбить диапазон значений случайной величины при построении гистограммы плотности её распределения:

$$n = 1 + \log_2 N,$$

где N – общее число наблюдений величины, \dots – целая часть числа..

Гистограмма дает графическое представление распределения значений расстояний для каждого класса. Частоты попадания в интервалы группировки нормируются таким образом, чтобы сумма для каждого класса составляла единицу. Нормирование гистограммы позволяет получить вероятностное распределение принадлежности объектов к классам.

Для оценки работы классификатора на объекте из тестовой выборки необходимо вычислить расстояния для каждой карты между этим объектом и выигравшими

нейронами. Затем, используя построенные гистограммы, можно определить вероятностную оценку принадлежности объекта к каждому из известных классов. После нормировки получаются значения, которые отражают степень близости объекта к каждому классу – эти вероятностные оценки позволяют понять, к какому классу более или менее вероятно принадлежит объект. Принадлежность определяется максимальной вероятностью.

4. ИЛЛЮСТРАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА

Для иллюстрации применения нового подхода была использована традиционная для курсов многомерного статистического анализа выборка ирисов Фишера, содержащая информацию о трех видах цветков. Она состоит из набора измерений четырех признаков: длины и ширины чашелистиков и лепестков. Каждый образец в выборке имеет соответствующую метку класса, обозначающую вид ириса: *setosa*, *versicolor* или *virginica*. Это позволяет проводить классификацию ирисов на основе их характеристик.

Сначала было обучено 3 карты Кохонена: карта для класса *setosa* обучается только на образцах этого класса, карта для класса *versicolor* – только на образцах *versicolor*, и аналогично для карты класса *virginica*. Размерность каждой карты составила 3, то есть 9 нейронов на карту.

Для получения гистограмм был проведен анализ 3 тестовых выборок – выборка каждого класса проверялась на соответствующей ей карте. В результате чего получены расстояния до выигравших нейронов на каждой карте, по которым были построены гистограммы. Затем они нормируются.

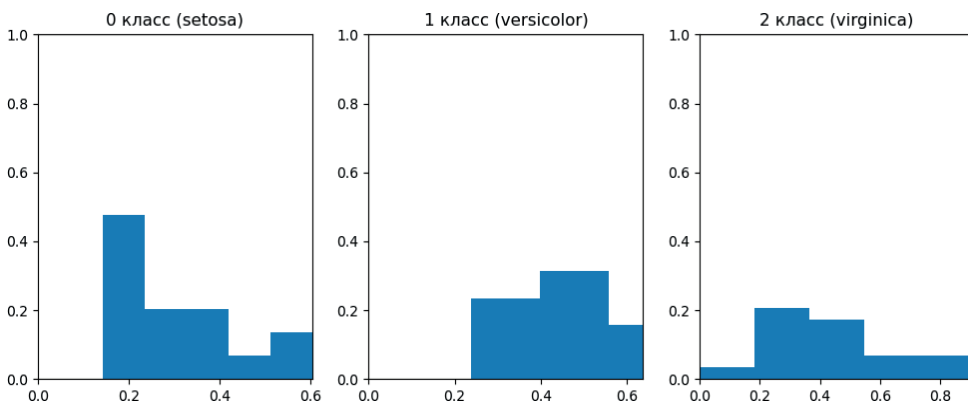


Рис. 3. Диаграммы для классов *setosa*, *versicolor*, *virginica*

Исходя из полученной статистики, можем определить правильно ли объект был отнесен к классу, ведь в тестовой выборке мы знаем, к какому классу он действительно принадлежит. Результаты представлены в виде матрицы классификаций.



16	0	0
0	15	1
0	1	15

где столбцы – реальные классы объектов из тестовой выборки, строки – определенные предложенным методом классы.

Полный алгоритм, примененный к ирисам Фишера, реализован на языке программирования Python. После неоднократных выполнений программы, изменений параметров карт и их размеров стало ясно, что алгоритм выполняет поставленную задачу строго не хуже, а, как правило, лучше (зависит от случайной инициализации нейронов) дискриминантного анализа Фишера. Помимо определения класса поступающего на вход объекта, программа даёт оценку вероятности принадлежности к этому и другим классам.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен новый непараметрический вариант дискриминантного анализа, особенностями которого являются:

- использование для выбора классов самоорганизующихся карт Кохонена;
- получение вероятностной оценки принадлежности к классам;
- устойчивость к выбросам в эмпирических данных.

Преимуществом разработанного подхода является отсутствие априорных предположений о распределении исследуемых эмпирических данных.

Литература

1. Кохонен Т. Самоорганизующиеся карты, пер. 3-го англ. изд. 2-е изд. (эл.), М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
2. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Компьютерное моделирование и анализ данных. Конспекты лекций и упражнения: Учеб. пособие. – М.: РУСАВИА, 2012. С. 62–65, 108
3. Воронцов К.В. Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин), С. 9, 42 URL: <https://www.kaznu.kz/content/files/pages/folder23376/Voron-ML-1.pdf>
4. Воронов М.В. Системы искусственного интеллекта: учебник и практикум для вузов / М.В. Воронов, В.И. Пименов, И.А. Небаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2023.
5. StatSoft. Электронный учебник по статистике // Дискриминантный анализ. URL: <http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stdiscan.html>
6. Sturges H. The choice of a class-interval. J. Amer. Statist. Assoc., 1926 P. 21, 65–66.



Discriminant Analysis Based on Kohonen Statistics

Ivan V. Komarov*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6848-5977>

e-mail: busykomarov@gmail.com

Lev S. Kuravsky**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>

e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

The paper describes a new method of discriminant analysis based on T. Kohonen's neural networks. The analysis algorithm and its advantages are considered.

Keywords: discriminant analysis, Kohonen's self-organizing maps.

For citation:

Komarov I.V., Kuravsky L.S. Discriminant Analysis Based on Kohonen Statistics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 176–182. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130411> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kohonen T. Self-organizing maps, pers. 3rd Engl. ed. 2nd ed. (el.), M. BINOM. Laboratory of Knowledge, 2014.
2. Kuravsky L.S., Baranov S.N. Computer modeling and data analysis. Lecture notes and exercises: Tutorial. – MOSCOW: RUSAVIA, 2012. С. 62–65, 108
3. Vorontsov K.V. Mathematical methods of learning from precedents (machine learning theory), P. 9, 42 URL: <https://www.kaznu.kz/content/files/pages/folder23376/Voron-ML-1.pdf>.
4. Voronov, M.V. Artificial intelligence systems: textbook and practice for universities / M.V. Voronov, V.I. Pimenov, I.A. Nebaev. – 2nd ed., revision and add. – Moscow: Yurait Publishing House, 2023.
5. StatSoft. Electronic textbook on statistics // Discriminant analysis. URL: <http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stdiscan.html>.
6. Sturges H. The choice of a class-interval. J. Amer. Statist. Assoc., 1926 P. 21, 65–66.

***Ivan V. Komarov**, Student of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6848-5977>, e-mail: busykomarov@gmail.com

****Lev S. Kuravsky**, Doctor of Engineering, Professor, Dean of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

Получена 20.11.2023

Принята в печать 06.12.2023

Received 20.11.2023

Accepted 06.12.2023

Моделирование и анализ данных 2023. Том 13. № 4.
Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий
Тел.: +7 (499) 167-66-74
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.
Свидетельство о регистрации средств массовой информации
ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758
ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 15.12.2023.
Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.
Усл. печ. п. 11,4. Усл.-изд. л. 9,7.