

**4**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING  
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2019**

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**2019 • Том. 09 • № 4**

# **MODELLING AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2019 • Vol. 09 • № 4**



Московский государственный  
психолого-педагогический университет  
Moscow State University  
of Psychology & Education

## **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**Главный редактор** – Л.С. Куравский

**Заместители главного редактора** – С.Д. Кулик, А.В. Пантелеев

**Члены редакционной коллегии** – К.К. Абгарян, Г.Г. Амосов, М.В. Воронов, Е.Л. Григоренко (США), В.К. Захаров, А.И. Кибзун, Л.М. Либкин (Великобритания), В.Р. Милов, А.В. Наумов, Д.Л. Ревизников, Х. Холлинг (Германия), Д. Фрэнсис (США), К.В. Хорошенков (*Великобритания*), Г.А. Юрьев

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

**Председатель редакционного совета** – Г.Г. Амосов

**Члены редакционного совета** – В.А. Барабанщиков, П. Бентлер (США), А.В. Горбатов, Л.С. Куравский, Л.М. Либкин (Великобритания), А.А. Марголис, В.В. Рубцов, Д.В. Ушаков, Д. Фрэнсис (США)

**Ответственный секретарь** – Н.Е. Юрьева

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

**ISSN: 2219-3758**

**ISSN: 2311-9454 (online)**

© **ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2019.**

Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения редакционной коллегии.

Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.



◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ **СОДЕРЖАНИЕ** ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

---

*Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л.*  
Моделирование динамических систем с интервальными параметрами. Обзор методов и программных средств ..... 5

*Пантелеев А.В., Савельева В.С.*  
Анализ модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат и конечном спросе на продукцию ..... 32

*Зубов С.А.*  
Исследование модифицированной стратегии последовательного хеджирования с наклонной полосой нечувствительности ..... 46

**АНАЛИЗ ДАННЫХ**

---

*Алексейчук А.С., Виноградов В.И., Данякин К.Д.*  
Задачи анализа и прогнозирования деятельности IT компании с использованием методов машинного обучения ..... 57

*Хорошилов Ал-др А., Козловская Я.Д., Мусабаяев Р.Р., Красовицкий А.М., Хорошилов Ал-ей А.*  
Определение тональности сообщений СМИ методом их концептуального анализа ..... 67

*Куренных А.Е., Судаков В.А., Осипов В.П.*  
Использование web-сервисов для повышения согласованности суждений матриц парных сравнений ..... 80

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

---

*Пантелеев А.В., Лобанов А.В.*  
Градиентные методы оптимизации в машинном обучении идентификации параметров динамических систем ..... 88

*Сивакова Т.В., Судаков В.А.*  
Мультиагентное моделирование в задачах формирования расписаний ..... 100

**КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

---

*Мельничук А.В., Судаков В.А.*  
Компьютерная поддержка решений пилота на этапах взлета и посадки ..... 112

*Алексеев Н.С., Архипова М.М.*  
Редактор графов на основе пакета Cytoscape ..... 121

**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ**

---

*Куланин Е.Д., Нуркаева И.М., Степанов М.Е.*  
Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики ..... 127

*Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е.*  
Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой ..... 145

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ**

---

*Ибрагимов Д.Н., Турчак Е.Е.*  
Об одном методе декомпозиции в задаче быстрого действия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением ..... 157



◇◇◇◇◇ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ◇◇◇◇◇

УДК 519.622.2:519.652

## Моделирование динамических систем с интервальными параметрами. Обзор методов и программных средств

**Морозов А.Ю.\***

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия  
ФГБОУ ВО МАИ, Москва, Россия  
morozov@infway.ru

**Ревизников Д.Л.\*\***

ФГБОУ ВО МАИ, Москва, Россия  
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия  
reviznikov@gmail.com

В работе выполнен обзор существующих библиотек и реализованных в них методов моделирования динамических систем с интервальными параметрами. Рассмотрены доступные библиотеки программ AWA, VNODE-LP, COSY Infinity, RiOT, FlowStar, а также авторский алгоритм адаптивной интерполяции. Рассмотренные библиотеки позволяют находить гарантированные оценки решений, однако с течением времени эти оценки становятся существенно завышенными. За счет использования принципиально другого подхода к построению решений, алгоритм адаптивной интерполяции не подвержен накоплению ошибок, определяет границы решений с контролируемой точностью и работает значительно быстрее аналогов.

**Для цитаты:**

Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Моделирование динамических систем с интервальными параметрами. Обзор методов и программных средств // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 5–31. doi: 10.17759/mda.2019090401

\***Морозов Александр Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), Москва, Россия. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (ФГБОУ ВО МАИ), Москва, Россия. E-mail: morozov@infway.ru

\*\***Ревизников Дмитрий Леонидович**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (ФГБОУ ВО МАИ), Москва, Россия. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), Москва, Россия. E-mail: reviznikov@gmail.com



**Ключевые слова:** интервальные методы, динамические системы с интервальными параметрами, алгоритм адаптивной интерполяции, библиотеки методов, AWA, VNODE, COSY Infinity, RiOT, FlowStar, verifyode.

## Введение

При решении прикладных задач механики, химической кинетики, газовой динамики и других или при исследовании определенных свойств динамических систем часто возникают ситуации, когда какие-либо параметры точно не известны, но есть информация о диапазонах, в которых находятся их значения. Для таких задач является актуальным получение интервальных оценок решений по известным интервальным значениям их параметров. Традиционно подобные задачи формулируются в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с интервальными начальными условиями или параметрами.

Отметим, что аппарат исследования динамических систем достаточно широко развит [1–5] и обобщение его на динамические системы с интервальными параметрами представляет практический интерес.

Выделим несколько групп существующих методов. К первой группе отнесем методы типа Монте-Карло, представленные в работах Соболя И. М. [6], Ермакова С.М., Михайлов Г.А. [7], Крамера Г. [8], Золотарева В.М. [9] и др. Их суть заключается в проведении многократных расчетов со случайными значениями соответствующих интервальных параметров. Этим методам присущ ряд положительных свойств, таких как простота, высокая степень распараллеливания и отсутствие потребности в аналитической записи правой части ОДУ, но при этом они обладают низкой ( $\sqrt{N}$ , где  $N$  – количество симуляций) скоростью сходимости и требовательны к вычислительным ресурсам.

В качестве альтернативы выступают методы, в основе которых лежат интервальные вычисления. Еще Архимед в свое время использовал интервальные оценки для определения числа пи, но активное развитие интервальные методы получили, начиная с XX века в работах Янги Р. [10], Двайера П. [11], Вармуса М. [12], Сунаги Т. [13], Мура Р. [14], Лонера Р. [15], Хансена Э. [16], Алефельда Г. [17], Кравчика Р. [18], Никельи К. [19], Ноймайера А. [20] и др. Среди отечественных родоначальников интервальной математики – Брадис В.М. [21], Канторович Л. В. [22], Шокин Ю.И. [23, 24], Добронев Б.С. [25, 26], Шарый С.П. [27], Рогалев А. Н. [28–30] и др. Из-за своей природы интервальные методы подвержены так называемому эффекту обертывания (эффекту Мура), проявляющемуся в безграничном росте ширины получаемых интервальных оценок решений. Этот эффект возникает вследствие замены точной формы множества решений на более простую форму и для итеративных методов зачастую приводит к экспоненциальному расхождению границ интервалов. Многие из существующих и разрабатываемых методов направлены на борьбу с этим эффектом [31].

Во вторую группу входят методы, основанные на рядах Тейлора. Они в первую очередь ориентированы на получение гарантированных оценок решений, однако эффект обертывания уменьшают не в полной мере. Их идея заключается в аналитическом разложении решения системы ОДУ в ряд Тейлора с последующей оценкой остаточного члена. Для снижения эффекта Мура выполняется запоминание линейных преобразований, которые производились над множеством решений в процессе вычислений. К этим мето-



дам относятся метод Мура [14], метод параллелепипедов [32], QR-метод Лонера [15] и др. Они просты и нетребовательны в плане вычислительных ресурсов, но эффективны в задачах, где интервалы не слишком велики или где нелинейность системы ОДУ проявляется слабо. Существует несколько библиотек, реализующих эти методы: AWA [33], VNODE [34], ADIODES [35], VSNODE [36], VNODE-LP [37].

Отдельно стоят методы модели Тейлора, разработанные в Мичиганском университете Берзом М., Макино К. [38–43], Нехером М., Джексоном К.Р., Недалковым Н.С. [44], Натарым П.С., Сондуром С. [45] и др. В их основе лежит принципиально иной подход. Как и в других методах, основанных на рядах Тейлора, решение здесь раскладывается в ряд Тейлора и выполняется оценка остаточного члена, но при этом все вычисления происходят не в числах и не в интервалах, а в так называемых моделях Тейлора. Модель Тейлора представляет собой полином некоторой степени с интервальным остатком. Она сочетает интервальную арифметику с символьными вычислениями. Эффект обертывания уменьшается за счет установки функциональных зависимостей между начальными условиями и решением в каждый момент времени. Все вычисления с коэффициентами полиномиальной части модели Тейлора выполняются на множестве вещественных чисел, а интервальные границы вычисляются только для остатка ряда. При данном подходе все арифметические операции и стандартные функции должны работать с целыми полиномами в качестве операндов. Такой подход довольно эффективно снижает эффект обертывания, но при этом работа с полиномами выполняется намного медленнее работы с интервалами [46]. Среди библиотек, реализующих данные методы, можно выделить несколько: COSY Infinity [47], RiOT [48], FlowStar [49, 50], verifyode [51] и др. Область сходимости рядов практически всегда ограничена, поэтому в общем случае для решения задач, содержащих «большие» интервалы, в работах Макина К., Берза М. [52], Клеттинга М., Рауха А., Ашемманна Х., Хофера Е.П. [53] и других описываются идеи расщепления исходной области неопределенности на подобласти, которые обрабатываются по отдельности.

К третьей группе отнесем методы, основанные на символьных вычислениях. В частности, это методы модели Тейлора, а также метод, аппроксимирующий оператор сдвига вдоль траектории (Рогалев А.Н. [28–30]). Как и методы модели Тейлора, метод сдвига вдоль траектории в каждый момент времени получает решение в виде символьного выражения относительно интервальных параметров. Эти методы не подвержены или слабо подвержены эффекту обертывания, справляются с широким классом задач, но при этом для них характерна высокая вычислительная сложность и трудности при распараллеливании.

В работах Добронца Б.С. [54, 55], Некрасова С.А. [56] и других приводятся методы, способные находить оптимальные двусторонние оценки решений для систем ОДУ, обладающих определенными свойствами. В основном они построены на теоремах сравнения и, как следствие, применимы только для определенных классов систем ОДУ.

Также стоит упомянуть методы, которые приближают множество решений эллипсоидами, параллелепипедами или многогранниками [57, 58]. Они не лишены свойства завышения оценок, и для них желательным является выпуклость множества.

В общем случае для подавления эффекта обертывания необходимо устанавливать зависимость между интервальными параметрами и решением в каждый момент времени. Зачастую сложность соответствующих методов является экспоненциальной относительно количества интервальных начальных условий или параметров, поэтому очень важно, чтобы они хорошо распараллеливались. В последние годы активно идет развитие про-





граммно-аппаратной технологии CUDA, которая позволяет использовать графические процессоры (GPU) компании NVIDIA для общих вычислений. Ключевое отличие GPU от центральных процессоров (CPU) заключается в наличии тысяч ядер, способных одновременно производить расчеты. При использовании даже не очень дорогих видеокарт можно получить прирост производительности в десятки, а то и в сотни раз по сравнению с вычислениями на центральном процессоре. Отметим, что при всей своей привлекательности разработка, ориентированная на GPU, обладает рядом особенностей. Например, вместо наличия только оперативной памяти здесь имеется шесть различных ее видов и возможность напрямую взаимодействовать с кеш-памятью.

Исторически интервальные методы возникли в связи с потребностью в гарантированных вычислениях, которые учитывали бы погрешность самих вычислительных схем, а также ошибки округления при расчетах на ЭВМ. В настоящее время интерес представляют задачи, в которых интервальность возникает непосредственно в самой постановке, а свойством гарантированности можно пренебречь, если есть возможность контролировать точность получаемых границ решений. В связи с этим, авторами данной работы был разработан алгоритм адаптивной интерполяции [59–62], который позволяет за приемлемое время находить интервальную оценку решений с контролируемой точностью, не подвержен эффекту обертывания, имеет высокую степень распараллеливания, справляется с «большими» интервалами и при этом не требует аналитической записи правой части ОДУ и вычисления старших производных.

Идея алгоритма заключается в построении динамической структурированной сетки на основе kd-дерева над множеством, образованным интервальными параметрами задачи. Каждая вершина дерева представляет собой интерполяционную сетку, соответствующую заданной степени интерполяционного многочлена. С каждым узлом сетки сопоставляется решение, найденное при параметрах, определяемых положением узла в пространстве. В процессе выполнения алгоритма на каждом шаге интегрирования исходной системы ОДУ строится кусочно-полиномиальная функция, которая интерполирует зависимость решения задачи от точечных значений интервальных параметров. При наличии такой функции, нахождение интервальной оценки сводится к задаче оптимизации, для решения которой существуют как классические методы [63], так и интервальные [64–66].

Каждая итерация алгоритма состоит из двух этапов. На первом этапе все решения, связанные с узлами интерполяционных сеток, переносятся на следующий временной слой с помощью какого-либо численного метода интегрирования. На втором этапе происходит перестроение kd-дерева по принципу минимизации ошибки интерполяции в вершинах.

Возможность определять наличие в динамической системе бифуркаций и хаоса является важным аспектом при исследовании динамических систем [1, 67, 68]. В связи с этим отметим, что по качественному изменению адаптивной сетки, получающейся в процессе работы алгоритма, можно судить о режимах, которые возникают в динамической системе.

## Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева

Интервальная постановка задачи Коши:

$$\begin{cases} u' = f(t, u, \eta) \\ u(0) = u_0 \in u_0, \eta \in \eta, \\ t \in [0; t_N] \end{cases} \quad (1)$$



где  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_\eta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$  – правая часть системы ОДУ,  $u_0 \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_u}$  – интервальные начальные условия,  $\zeta \in \mathbb{I}\mathbb{R}^{n_\eta}$  – интервальные параметры.

Здесь и далее интервалы выделяются жирным шрифтом, а их множество обозначается  $\mathbb{I}\mathbb{R} = \{x = [\underline{x}; \bar{x}], \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}\}$ .

Для дальнейшего удобства описания алгоритма преобразуем к автономной системе ОДУ без параметров путем добавления в систему фиктивных уравнений, а также сгруппируем интервальные начальные условия:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in y_0, \\ t \in [0; t_N] \end{cases} \quad (2)$$

где  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 = (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^m, y_0^{m+1}, \dots, y_0^n)^T$ ,  $n = n_u + n_\eta + 1$ .

Обозначим через  $y_k = y(y_0, t_k)$  решение системы в момент  $t_k$ . Над пространством, образованным интервальными начальными условиями, построим равномерную регулярную интерполяционную сетку  $G_k^0$ , соответствующую корневой вершине дерева и представляющую собой табличную функцию:

$$G_k^0 = \{(y_0^{i_1 i_2 \dots i_m}, y_k^{i_1 i_2 \dots i_m}) \mid 0 \leq i_l \leq p, 1 \leq l \leq m\},$$

$$y_0^{i_1 i_2 \dots i_m} = \left( \underline{y}_0^1 + \frac{\bar{y}_0^1 - \underline{y}_0^1}{p} i_1, \underline{y}_0^2 + \frac{\bar{y}_0^2 - \underline{y}_0^2}{p} i_2, \dots, \underline{y}_0^m + \frac{\bar{y}_0^m - \underline{y}_0^m}{p} i_m, y_0^{m+1}, \dots, y_0^n \right)^T,$$

$$y_k^{i_1 i_2 \dots i_m} = y(y_0^{i_1 i_2 \dots i_m}, t_k),$$

где  $p$  – степень интерполяционного многочлена. Отметим, что требование равномерности разбиения необязательно и используется здесь для сокращения записи.

Для каждого  $y_k^{i_1 i_2 \dots i_m}$  вычислим  $y_{k+1}^{i_1 i_2 \dots i_m} = y(y_0^{i_1 i_2 \dots i_m}, t_{k+1}) = y(y_k^{i_1 i_2 \dots i_m}, t_{k+1} - t_k)$ , решив соответствующую неинтервальную систему ОДУ. По полученной табличной функции

$$G_{k+1}^0 = \{(y_0^{i_1 i_2 \dots i_m}, y_{k+1}^{i_1 i_2 \dots i_m}) \mid 0 \leq i_l \leq p, 1 \leq l \leq m\}$$

построим интерполяционный многочлен  $P_{k+1}^0(y)$ , например, в форме Лагранжа:

$$P_{k+1}^0(y) = \sum_{i_1=0}^p \dots \sum_{i_m=0}^p y_{k+1}^{i_1 i_2 \dots i_m} l^{i_1 i_2 \dots i_m}(y),$$

где

$$l^{i_1 i_2 \dots i_m}(y) = \prod_{j=0}^p \prod_{\substack{l=0 \\ i_l \neq j}}^m \frac{p(y^l - \underline{y}_0^l) / (\bar{y}_0^l - \underline{y}_0^l) - j}{i_l - j}.$$

Если погрешность интерполяции

$$e = \max_{y_0 \in y_0} \|y(y_0, t_{k+1}) - P_{k+1}^0(y_0)\|$$

больше некоторого заданного числа  $\varepsilon$ , то  $G_k^0$  разбивается на две сетки  $G_k^1$  и  $G_k^2$  таким образом, чтобы их оценка погрешности интерполяции была меньше  $e$ . Для них выполняются все те же самые действия, что и для сетки  $G_k^0$ , и при необходимости



они тоже разбиваются. Если  $y(y_0, t_{k+1})$  непрерывно дифференцируема  $p+1$  раз по  $y_0$ , то можно показать, что процесс дробления конечен. На практике определяется минимальный размер ячейки, обычно сопоставимый с машинным эpsilon, по достижении которого дробление дальше не происходит, а соответствующая область пространства помечается как «область разрыва».

В результате на момент  $t_{k+1}$  будет получено kd-дерево и соответствующая ему кусочно-полиномиальная функция, интерполирующая решение с заданной точностью. Строить kd-дерево заново для каждого шага нет необходимости, вместо этого используется дерево, полученное на предыдущем шаге, и в зависимости от оценки погрешности интерполяции в его вершинах оно перестраивается (рис. 1). Процесс дробления вершин всегда происходит на предыдущем шаге (пунктирные линии), потому что при создании новых вершин выполняется интерполяция связанных с их узлами значений, и это необходимо выполнять в момент, когда погрешность еще допустима. Если для вершины и всех ее потомков ошибка интерполяции становится приемлемой, то потомки удаляются и сама вершина становится листом.

На практике оценка погрешности интерполяции выполняется только для некоторых точек из соответствующей области (рис. 2). Выделим два подхода к их выбору.

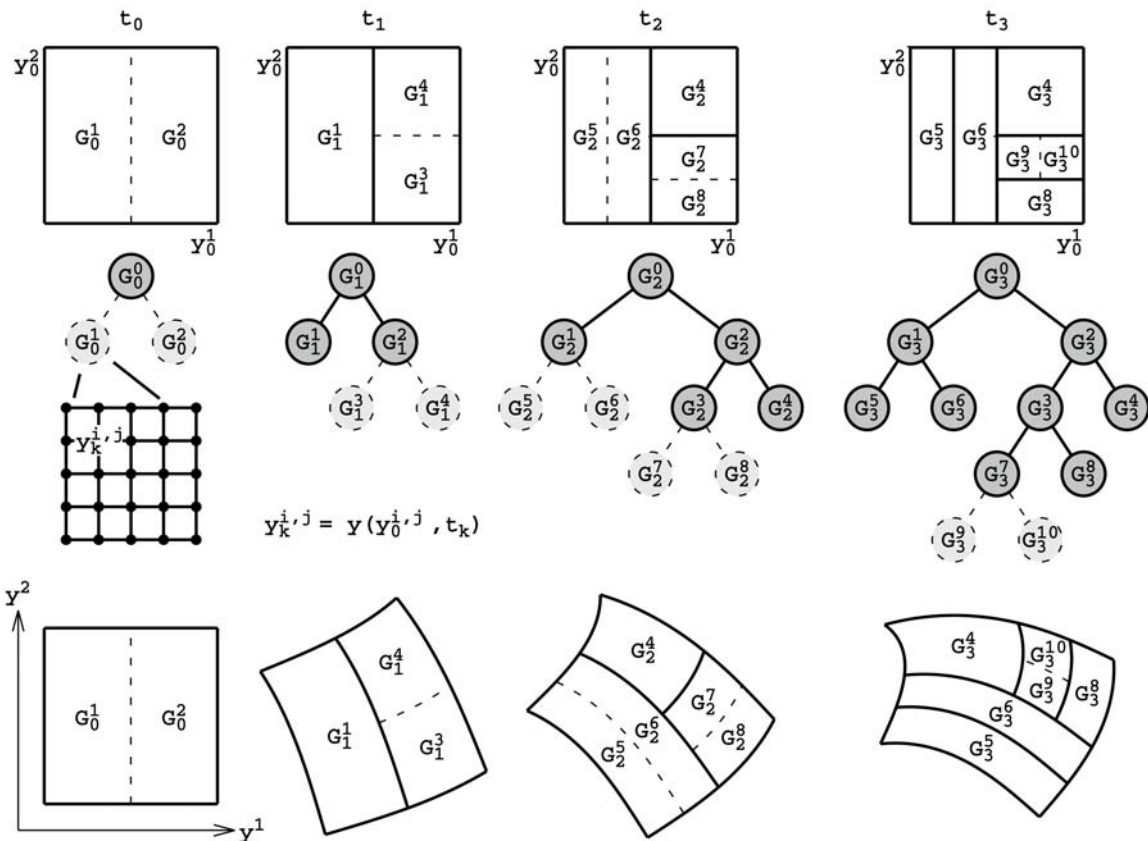


Рис. 1. Иллюстрация работы алгоритма.

Первый подход заключается в добавлении при создании в каждую вершину случайным образом тестового множества точек. Для оценки погрешности связанные с ними значения сравниваются со значениями, полученными интерполяцией. Использование та-

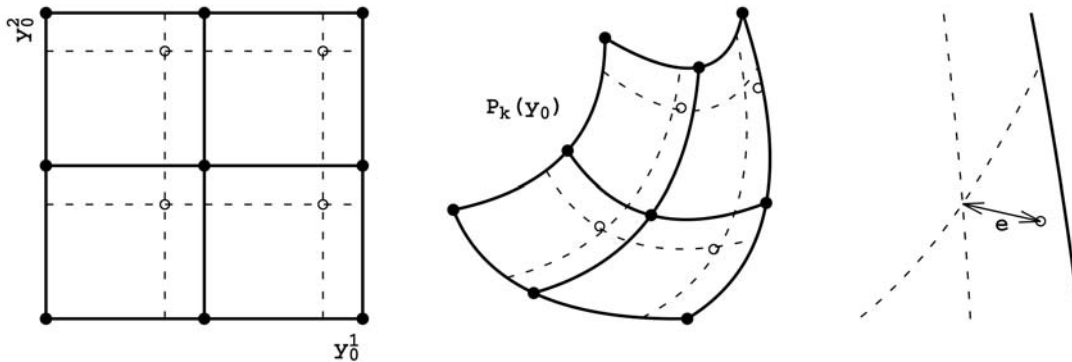


Рис. 2. Оценка погрешности интерполяции. Закрашенные точки – узлы интерполяционной сетки.  
Выколотые точки – точки, в которых оценивается погрешность интерполяции.

кого подхода, с одной стороны, позволяет адекватно оценивать погрешность, но, с другой стороны, требует дополнительных вычислительных затрат и дополнительной памяти для хранения вспомогательных точек. Второй подход заключается в удалении из сетки некоторого количества узлов с последующей интерполяцией связанных с ними значений по оставшимся узлам. Данный подход является менее трудозатратным, так как не требует дополнительных узлов, но при этом полученная оценка является завышенной, так как понижается степень интерполяционного полинома.

## Методы рядов Тейлора

Рассмотрим интервальную задачу Коши:

$$\begin{cases} u' = f(u), \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{u}_0, \end{cases}$$

где  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – правая часть системы ОДУ,  $u_0 \in \mathbb{I}\mathbb{R}^m$ .

Интервальные методы рядов Тейлора [31, 46, 69] заключаются в разбиении исходного периода интегрирования на определенное число шагов; при этом каждый шаг интегрирования состоит из двух этапов. Первый этап заключается в определении текущего шага интегрирования и априорного интервала  $v_j$ , гарантированно содержащего единственное решение  $u(t)$  для всех  $t \in [t_{j-1}; t_j]$  и  $u_{j-1} \in \mathbb{u}_{j-1}$  (рис. 3).

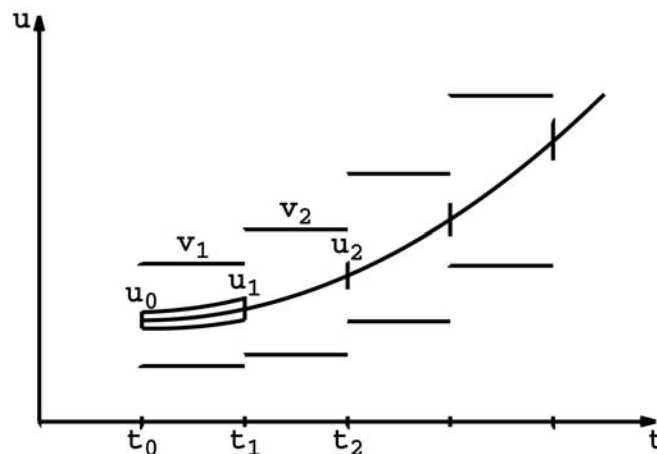


Рис. 3. Априорная оценка решения



На этом этапе часто применяют метод постоянного приближения первого порядка для автономных задач Коши, который заключается в следующем. Если  $h_j$  и  $v_j$  удовлетворяют условию  $v_j^1 = u_{j-1} + [0; h_j] f(v_j) \subseteq v_j$ , то задача Коши имеет единственное решение  $u(t) \in v_j^1$  для всех  $t \in [t_{j-1}; t_j]$  и  $u_{j-1} \in u_{j-1}$ .

На втором этапе с помощью априорного интервала  $v_j$  вычисляется более узкий интервал  $u_j$ , гарантированно содержащий решение исходной задачи в точке  $t_j$ .

Каждый шаг интегрирования рассматривается как некоторое нелинейное преобразование из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^m$ . При этом отделяется вычисление траектории перемещения области решения от производимых с ней деформаций под действием преобразования (для этого дополнительно вычисляется матрица Якоби преобразования).

Вычисление полных производных вплоть до  $k$ -го порядка имеет вид:

$$f^{[0]}(u) = u, f^{[k]}(u) = \left( \frac{\partial f^{[k-1]}}{\partial u} f \right)(u), k \geq 1$$

вычисление матрицы Якоби преобразования:

$$S_{j-1} = I + \sum_{k=1}^n \frac{h_j^k}{k!} J(f^{[k]})(u_{j-1})$$

где  $I$  – единичная матрица,  $J(f^{[k]})$  – матрица Якоби для  $f^{[k]}$ . Для некоторой точки  $\hat{u}_{j-1} \in u_{j-1}$  получаем итоговую формулу

$$u(t_j) \in u_j = \hat{u}_{j-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_j^k}{k!} f^{[k]}(\hat{u}_{j-1}) + S_{j-1}(u_{j-1} - \hat{u}_{j-1}) + z_j$$

$$z_j = \frac{h_j^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n]}(v_j)$$

Здесь эффект обертывания появляется в связи с членом  $S_{j-1}(u_{j-1} - \hat{u}_{j-1})$ .

Рассмотрим множество

$$\Sigma = \left\{ S_{j-1}(u_{j-1} - \hat{u}_{j-1}) \mid S_{j-1} \in S_{j-1}, u_{j-1} \in u_{j-1} \right\}$$

На каждом шаге интегрирования оно заменяется соответствующим прямоугольным параллелепипедом со сторонами, параллельными осям координат. За счет этого происходит паразитное увеличение множества решений.

Все методы семейства направлены на учет происходящих преобразований исходной области с дальнейшей их компенсацией на каждом шаге. Основная схема:

$$\hat{u}_0 = \text{mid}(u_0), r_0 = u_0 - \hat{u}_0, B_0 = I,$$

$$\hat{u}_j = \hat{u}_{j-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_j^k}{k!} f^{[k]}(\hat{u}_{j-1}) + \text{mid}(z_j),$$

$$u_j = \hat{u}_{j-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_j^k}{k!} f^{[k]}(\hat{u}_{j-1}) + z_j + (S_{j-1} B_{j-1}) r_{j-1},$$

где  $z_j$  – локальная ошибка,  $r_j$  – глобальная ошибка:

$$r_j = \left( B_j^{-1} (S_{j-1} B_{j-1}) \right) r_{j-1} + B_j^{-1} (z_j - \text{mid}(z_j)).$$



Все методы семейства различаются только способом вычисления матрицы  $B_j$ :

- Прямой метод Мура:  $B_j = I$ .
- Метод параллелепипедов (Еижгенраам, Лонер):  $B_j = \text{mid}(S_{j-1}B_{j-1})$ .
- QR-метод (Лонер):  $\text{mid}(S_{j-1}B_{j-1}) = QR, B_j = Q$ .

Прямой метод Мура никак не компенсирует эффект обертывания. QR-метод Лонера отличается от метода параллелепипедов тем, что на каждом шаге область решения заключается в прямоугольный параллелепипед для более эффективного учета локальной ошибки  $z_j$ .

Описанные выше методы значительно снижают эффект обертывания, особенно в однородных линейных системах ОДУ с постоянными коэффициентами. Однако при интегрировании нелинейных систем ОДУ эффект обертывания все равно проявляется, хотя и в меньшей мере, и начиная с определенного момента получаемые оценки решения становятся чрезмерно большими и неприемлемыми.

Матрица Якоби характеризует деформацию элементарных объемов пространства. В случае линейной системы ОДУ матрица Якоби постоянна и каждый элементарный объем области деформируется линейно и одинаково, как и в целом вся область. Поэтому область в процессе решения остается параллелепипедом. В случае нелинейной системы ОДУ матрица Якоби в каждой точке области разная. За счет использования интервальной арифметики получается уже интервальная матрица Якоби, содержащая в себе все возможные матрицы во всех точках области. При использовании такой матрицы для деформации заведомо закладывается то, что любой элементарный объем области может быть деформирован любой вещественной матрицей Якоби. Это в конечном счете и ведет к паразитному эффекту.

В работе [31] были предложены несколько модификаций данных методов для снижения эффекта обертывания. Их идея заключается в том, чтобы вычислять матрицу Якоби не для всей области, а только для некоторой заведомо меньшей части или вообще только в одной точке. Использование такого подхода лишает свойства гарантированности, но, как показали численные эксперименты, большая часть решения все равно содержится в получаемой оценке.

## Библиотека AWA

Библиотека AWA [33] разработана на Pascal-XSC в 1994 году Лонером Р. для решения ОДУ с гарантированной оценкой погрешности. Данная библиотека представляет собой реализацию QR-метода Лонера в качестве второго этапа и метода постоянного приближения для проверки существования и единственности решения в качестве первого этапа [46].

## Библиотека VNODE-LP

Библиотека VNODE-LP [37], это решатель интервальных систем ОДУ, разработанный в 2006 году Недялковым Н. С на алгоритмическом языке C++. В отличие от традиционных решателей, которые вычисляют приближительные решения, этот решатель доказывает, что существует единственное решение задачи, а затем строит строгие границы, которые гарантированно содержат его.

Библиотека является преемником библиотеки VNODE (Validated Numerical ODE), разработанной Недялковым Н. С. Отличительной особенностью данного решателя яв-



ляется то, что он полностью посвящен «грамотному программированию». Грамотное программирование – это стиль написания программ, при котором программа рассматривается не как последовательность инструкций для компьютера, а как литературное произведение. Таким образом, программист при написании программы формально описывает действия, которые он ожидает от компьютера, вставляя в соответствующие места код на языке программирования. Данная концепция предложена Кнудом Д. в 1984 году.

На первом этапе используется метод НОЕ, а во втором – метод Эрмита – Обрешкова. VNODE-LP имеет переменный шаг интегрирования и постоянный порядок.

## Методы модели Тейлора

Начиная с 1990-х годов профессором Берзом М. и его командой были разработаны методы модели Тейлора, которые сочетают интервальную арифметику с символьными вычислениями [44]. В этих методах основным типом данных является так называемая модель Тейлора, которая представляет собой полином некоторой степени с интервальным остатком:

$$p_n(x) + i$$

При использовании такого представления негативные эффекты, связанные с использованием интервальной арифметики, влияют только на интервальный остаточный член и полиномиальные члены порядка выше  $n$ , которые обычно очень малы.

Пусть  $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  –  $(n+1)$  раз непрерывно дифференцируемая функция на открытом множестве  $D$ , содержащем интервальный вектор  $x$ . Пусть  $x_0$  – точка в  $x$ ,  $p_n$  – многочлен Тейлора  $n$ -го порядка функции  $f$  в окрестности  $x_0$ , и  $i$  – интервал такой, что:

$$f(x) \in p_n(x - x_0) + i, \forall x \in x$$

Пара  $(p_n, i)$  называется моделью Тейлора  $n$ -го порядка для функции  $f$  в окрестности точки  $x_0$  на  $x$ .

Арифметические операции над моделями Тейлора определяются следующим образом:

$$T_1 + T_2 = (p_1 + p_2, i_1 + i_2), T_1 \cdot T_2 = (p_{1,2}, i_{1,2}),$$

где  $p_{1,2}$  – часть полинома  $p_1 \cdot p_2$ , не превышая порядка  $n$ ,

$$i_{1,2} = B(p_e) + B(p_1) \cdot i_2 + B(p_2) \cdot i_1 + i_1 \cdot i_2,$$

где  $p_e$  – часть полинома  $p_1 \cdot p_2$  порядка от  $n+1$  до  $2n$ ,  $B(p)$  – интервальная оценка полинома  $p$  на множестве  $x$ .

**Пример 1** [44]. Вычислим модель Тейлора второго порядка для экспоненты и косинуса на  $x = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ . Разложим функции в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 e^\xi, \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin(\xi),$$

где  $x, \xi \in x$ . Получаем следующие модели Тейлора:

$$T_1(x) := 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + [-0,035; 0,035], T_2(x) := 1 - \frac{1}{2}x^2 + [-0,010; 0,010].$$

Выполним их перемножение:

$$T_1(x)T_2(x) \subseteq \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) [-0,010; 0,010] +$$



$$\begin{aligned}
 & + \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)[-0,035; 0,035] + [-0,010; 0,010][-0,035; 0,035] \subseteq (1+x) - \frac{1}{2}x^3 - \\
 & - \frac{1}{4}x^4 + [0,625; 1,625][-0,010; 0,010] + [0,875; 1][-0,035; 0,035] + \\
 & + [-0,004; 0,004] \subseteq 1+x - [-0,063; 0,063] - [-0,016; 0,016] + [-0,202; 0,202] = \\
 & = 1+x + [-0,281; 0,281]
 \end{aligned}$$

В результате получена модель Тейлора для функции  $e^x \cos x$ ,  $x \in x$ :

$$e^x \cos x \in 1+x + [-0,281; 0,281], x \in x.$$

Решение интервальных систем ОДУ ищется в виде модели Тейлора относительно интервальных начальных условий. Все арифметические действия в методах заменяются соответствующими операциями над полиномами, в результате чего в конечный момент времени решение представляется в виде полинома относительно интервальных параметров и некоторого интервального остатка.

**Пример 2** [44]. Рассмотрим систему ОДУ с интервальными начальными условиями:

$$\begin{cases} u' = v, v' = u^2, \\ u(0) = 1 + u_0, v(0) = -1 + v_0, \end{cases}$$

где  $u_0 \in [-0,05; 0,05]$  и  $v_0 \in [-0,05; 0,05]$ . Выполним два шага методом Эйлера с использованием моделей Тейлора 2-го порядка:

$$\begin{aligned}
 u(0,1) &= 1 + u_0 + (-1 + v_0)0,1 = 0,9 + u_0 + 0,1v_0, \\
 v(0,1) &= -1 + v_0 + (1 + u_0)^2 0,1 = -0,9 + v_0 + 0,2u_0 + 0,1u_0^2, \\
 u(0,2) &= 0,9 + u_0 + 0,1v_0 + (-0,9 + v_0 + 0,2u_0 + 0,1u_0^2)0,1 = \\
 &= 0,81 + 1,02u_0 + 0,2v_0 + 0,01u_0^2, \\
 v(0,2) &= -0,9 + v_0 + 0,2u_0 + 0,1u_0^2 + (0,9 + u_0 + 0,1v_0)^2 0,1 = \\
 &= -0,819 + 1,018v_0 + 0,38u_0 + 0,2u_0^2 + 0,001v_0 + 0,02v_0u_0.
 \end{aligned}$$

Уже начиная с третьего шага в процессе вычислений появятся степени больше второй, которые будут «уходить» в интервальный остаток. Полученное таким способом решение не является гарантированным, так как оно не учитывает погрешность метода Эйлера. В оригинальном методе происходит аналитическое разложение решения в ряд Тейлора и вычисление интервальной оценки остаточного члена. Поэтому полученное таким способом решение гарантированно содержит все решения исходной системы ОДУ.

В целом использование арифметики моделей Тейлора вместо классических интервальных арифметик существенно снижает эффект обертывания, особенно при интегрировании нелинейных систем ОДУ.

## Библиотека COSY Infinity

Библиотека COSY Infinity [47] разрабатывается в Мичиганском университете профессором Берзом М. и его командой. Это система для проведения различных современных научных вычислений. Она состоит из следующих частей:





1. Набор расширенных и оптимизированных типов данных:
  - Дифференциальные алгебраические типы для многомерного исследования ОДУ, потоков и дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Здесь имеется поддержка автоматического дифференцирования высокого порядка.
  - Тип модели Тейлора для строгих вычислений высокого порядка. Разнообразные инструменты – в частности, инструменты для ограничения роста остаточного члена, инструменты для проверки ограничений и т. д.
2. Скриптовый язык COSYScript, в котором используются описанные выше типы. Он объектно ориентирован и поддерживает полиморфизм, имеет компактный и простой синтаксис, компилируется и выполняется на лету.
3. Интерфейсы для C, F77, C++ и F90 для использования типов во внешних программах.
4. Различные прикладные пакеты с использованием типов данных COSY, включая физику луча.

К сожалению, в текущей версии библиотеки COSY Infinity 10.1 (2018 год) модель Тейлора не поддерживается и при этом доступ к более ранним версиям отсутствует. В связи с этим выполнить прямое сравнение с данным программным комплексом не представляется возможным. Однако в работе [48] приводится сравнение библиотеки RiOT с COSY-VI на представительном наборе задач. Поэтому при сравнении с библиотекой RiOT будет выполнено косвенное сравнение с библиотекой COSY.

## Библиотека RiOT

RiOT – это свободная программа на языке C++ для интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями, последняя версия – 2008 года [48]. В ней реализованы модель Тейлора, предложенная Берзом М. и Макино К., а также механизм уменьшения накопления ошибок интегрирования Shrink Wrapping [70, 71], который позволяет выполнять интегрирование на длительные периоды. Идея механизма заключается в том, что за счет варьирования коэффициентов полинома удается как бы «спрятать» интервальный остаток в полином, где уже работает неинтервальная арифметика.

## Библиотека FlowStar

Библиотека FlowStar [50] – это инструмент для достоверного моделирования гибридных динамических систем с интервальными параметрами, разработанный на языке C++, последняя версия – 2017 года. По значению интервальных параметров, натурального числа  $m$  и гибридной системе  $A$ , которая моделируется гибридным автоматом, FlowStar вычисляет конечный набор моделей Тейлора, содержащий в себе все состояния  $A$ , которые достижимы не более чем за  $m$  шагов.

Библиотека состоит в основном из двух модулей: вычислительной библиотеки и алгоритмов высокого уровня. В первый модуль входят реализации интервалов и интервальных арифметик, а также модель Тейлора. Во втором модуле реализованы методы, которые используются в анализе достижимости. Текущая версия FlowStar поддерживает гибридные системы, включающие в себя следующие компоненты:

- Непрерывные динамические системы, которые задаются с помощью ОДУ с интервальными начальными условиями и параметрами.
- Условия перехода, которые можно определять в виде системы полиномиальных неравенств.
- и т.д.

## Сравнение методов и реализаций

Так как рассматриваемые библиотеки не распараллеливаются, их сравнение производится с реализацией алгоритма адаптивной интерполяции без использования технологии CUDA. Характеристика CPU и ОП: Intel(R) Core(TM) i5-4200M CPU @ 2.50GHz, 16 GiB 1600 MHz. Для всех библиотек параметры методов задавались одинаковыми: порядок 18, локальная абсолютная погрешность  $10^{-11}$  (значение остаточного члена при разложении решения в ряд Тейлора) и начальный шаг  $h_0 = 3 \times 10^{-2}$ . Так как рассматриваемые далее несколько задач взяты из работы [48], такой выбор параметров соответствует приведенным в этой работе расчетам. Для алгоритма адаптивной интерполяции порядок задавался  $p = 4$  и относительная погрешность  $10^{-5}$ . Интегрирование неинтервальных ОДУ выполнялось методом Рунге – Кутты четвертого порядка с постоянным шагом  $h = 10^{-3}$ .

Модель Лотки – Вольтерры:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2xy, & y' = -y + xy, \\ x(0) \in [0,95; 1,05], & y(0) \in [2,95; 3,05], & t \in [0; 100]. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 4 показано множество решений системы в различные моменты времени. Для начальной точки  $x = 1, y = 3$  период вращения равен  $T = 5,488138468035$ , о чем свидетельствует совпадение центров множеств в начальный момент времени и при  $t = T$ . Из-за того, что для остальных начальных точек, содержащихся в интервальных начальных условиях, период вращения другой, происходит вытягивание множества.

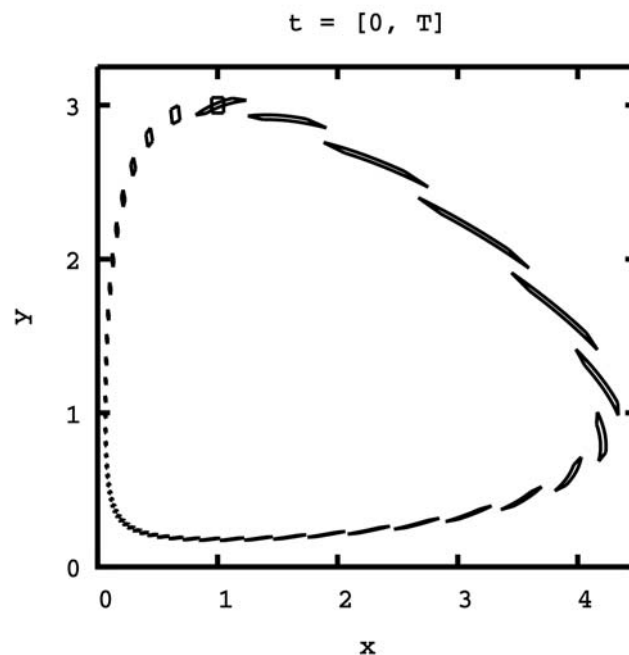


Рис. 4. Один период вращения множества решений системы

В таблице 1 и на рис. 5 приведено сравнение результатов, полученных разными программными комплексами. Библиотеки AWA и VNODE-LP практически не компенсируют эффект обертывания, и уже с момента  $t > 4,5$  его влияние оказывается существенным и решения расходятся. Отметим, что по вычислительным затратам библиотека VNODE-LP наиболее эффективная.



Таблица 1

Сравнение результатов решения системы в момент времени 0,8T

Библиотека	Время, с	x	y
Точное решение	—	[2.469047; 2.847741]	[ 0,244560; 0,315898]
Алг. адпт. интр.	0,038	[2,469047; 2,847741]	[0,244560; 0,315898]
AWA	0,114	[2,207070; 3,111953]	[0,172401; 0,381625]
VNODE-LP	0,005	[2,243064; 3,075959]	[0,187871; 0,366156]
RiOT	23,82	[2,468492; 2,848475]	[0,242515; 0,316225]
FlowStar	68,87	[2,373701; 3,179943]	[0,220549; 0,370295]

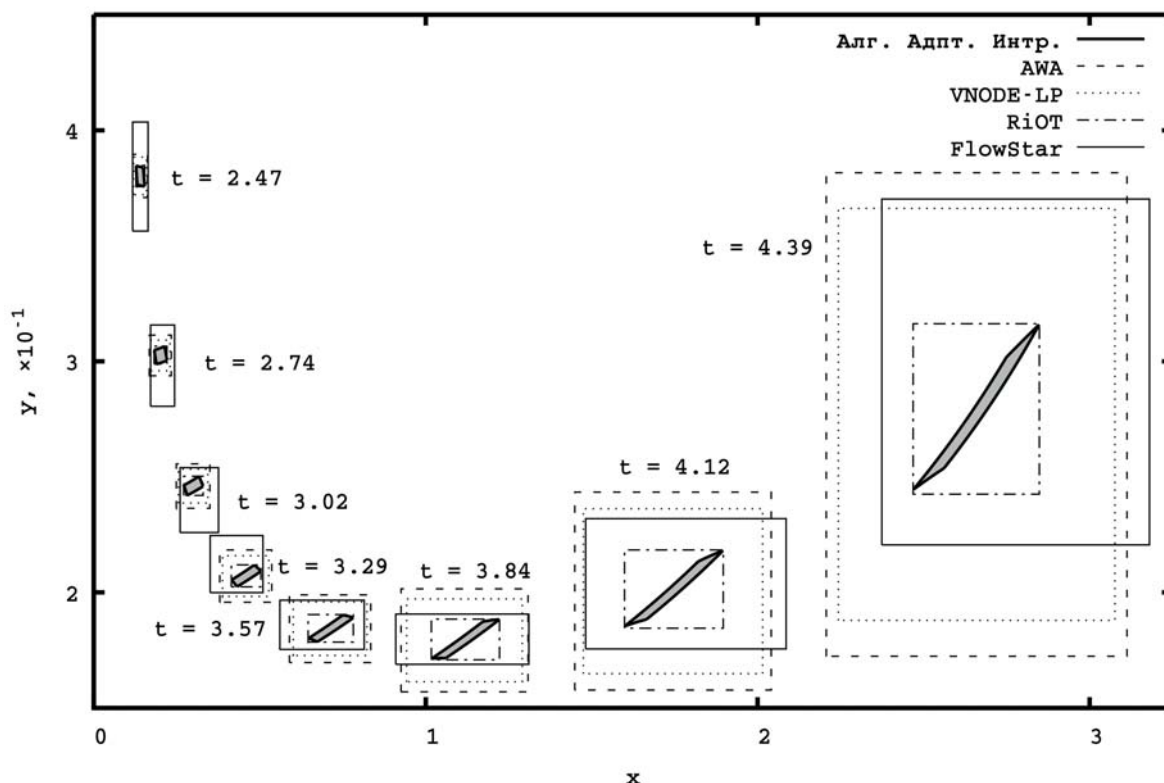


Рис. 5. Сравнение решений системы, полученных различными библиотеками, в различные моменты времени

В таблице 2 приведено сравнение с библиотекой COSY-VI. Здесь и далее время работы COSY-VI оценивается относительно библиотеки RiOT, так как в работе [48] имеется их сопоставление. В таблице 3 и на рис. 6 приведено сравнение решений системы в момент времени  $t = 14,56$ . Здесь наблюдается сильное завышение получаемых оценок решений.

Таблица 2

Сравнение результатов решения системы в момент времени T

Библиотека	Время, с	x	y
Точное решение	—	[0,816719; 1,240265]	[2,936455; 3,045758]
Алг. адпт. интр.	0,039	[0,816719; 1,240265]	[2,936455; 3,045758]
RiOT	287,5	[0,798904; 1,240280]	[2,933777; 3,054377]
FlowStar	158,8	[0,57513; 1,470005]	[2,869371; 3,113960]
COSY-VI	≈2,96	[0,816719; 1,240265]	[2,935927; 3,045759]

Таблица 3

Сравнение результатов решения системы в момент времени 14,56

Библиотека	Время, с	x	y
Точное решение	–	[0,581638; 0,911206]	[0,182434; 0,186810]
Алг. адпт. интр.	0,068	[0,581638; 0,911206]	[0,182434; 0,186810]
RiOT	903,7	[0,327651; 0,958718]	[0,113389; 0,235948]
FlowStar	460,4	[0,549449; 1,137605]	[0,169651; 0,193453]

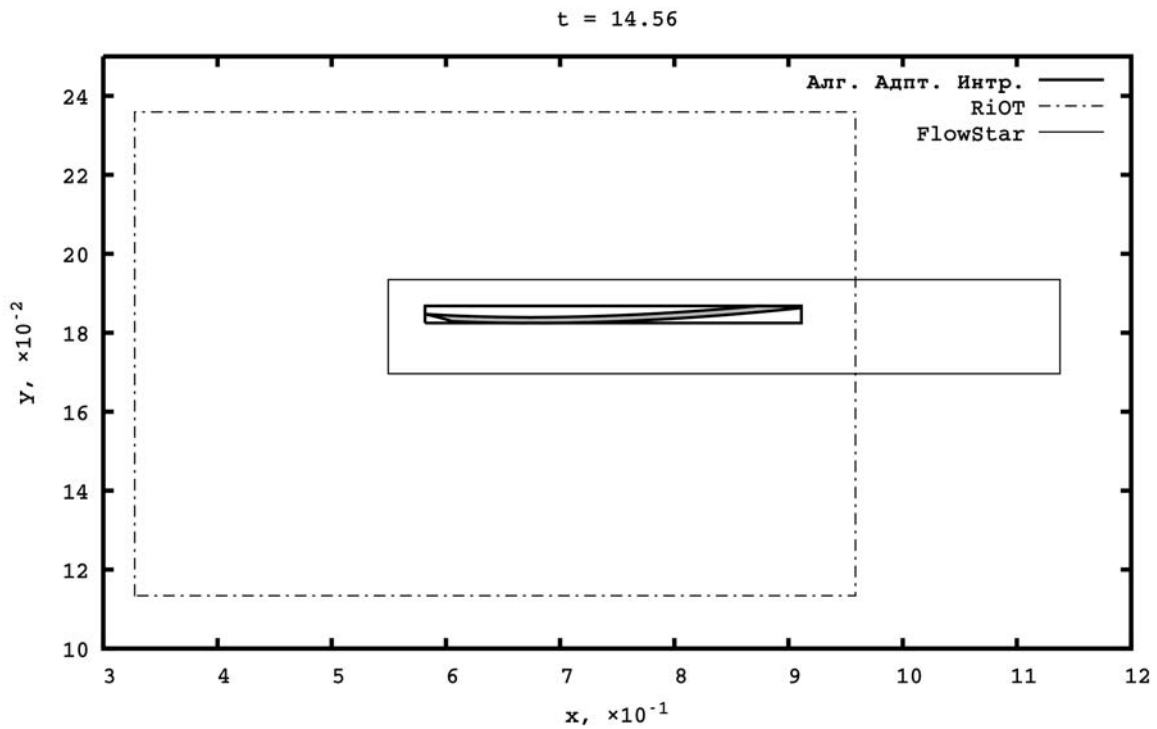


Рис. 6. Оценки решений системы различными библиотеками

На рис. 7 приведена иллюстрация решения, полученного библиотекой FlowStar. Интервальный остаток ( $i$ ) существенно больше полиномиальной части решения, и уже при  $t \approx 16$  библиотека аварийно завершает расчет.

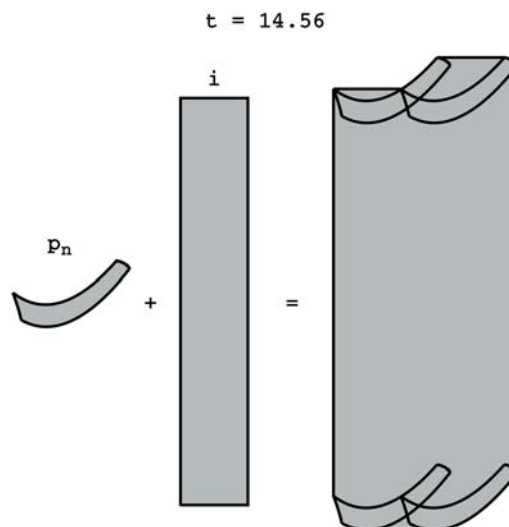


Рис. 7. Модель Тейлора. Решение системы, полученное FlowStar



Рассмотрим систему ОДУ:

$$\begin{cases} x' = \eta \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y \right), & y' = \eta \left( -\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right), \\ x(0) \in [-1; 1], & y(0) \in [-1; 1], & t \in [0; 4,5], \end{cases} \quad (4)$$

где  $\eta \in [-1; 1]$ .

На рис. 8 и рис. 9 показано множество решений исходной системы ОДУ в различные моменты времени.

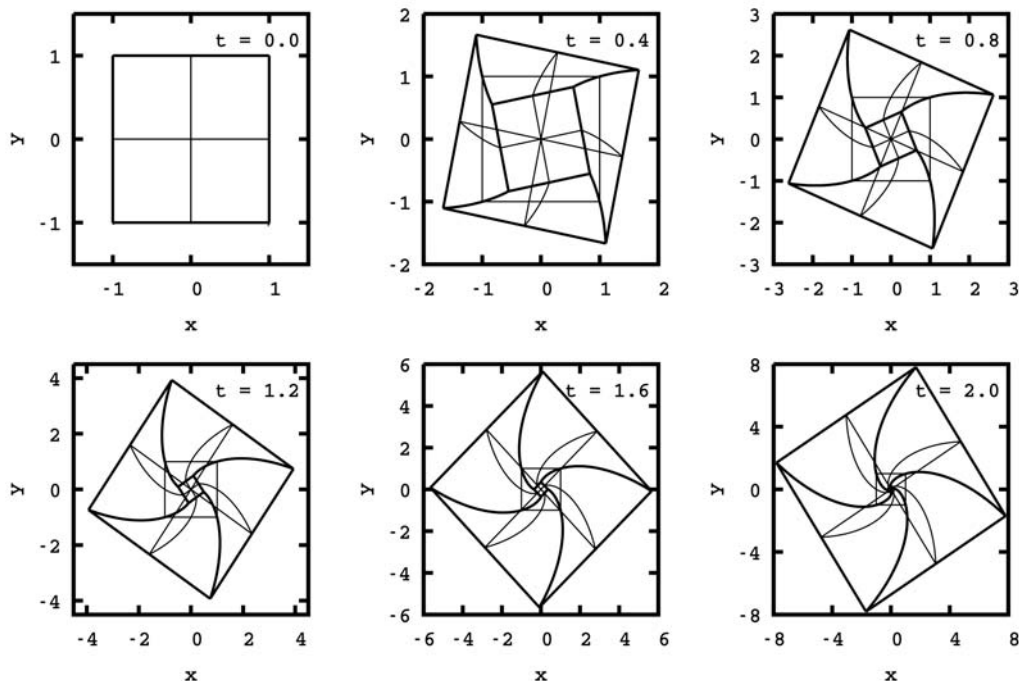


Рис. 8. Множество решений системы в различные моменты времени

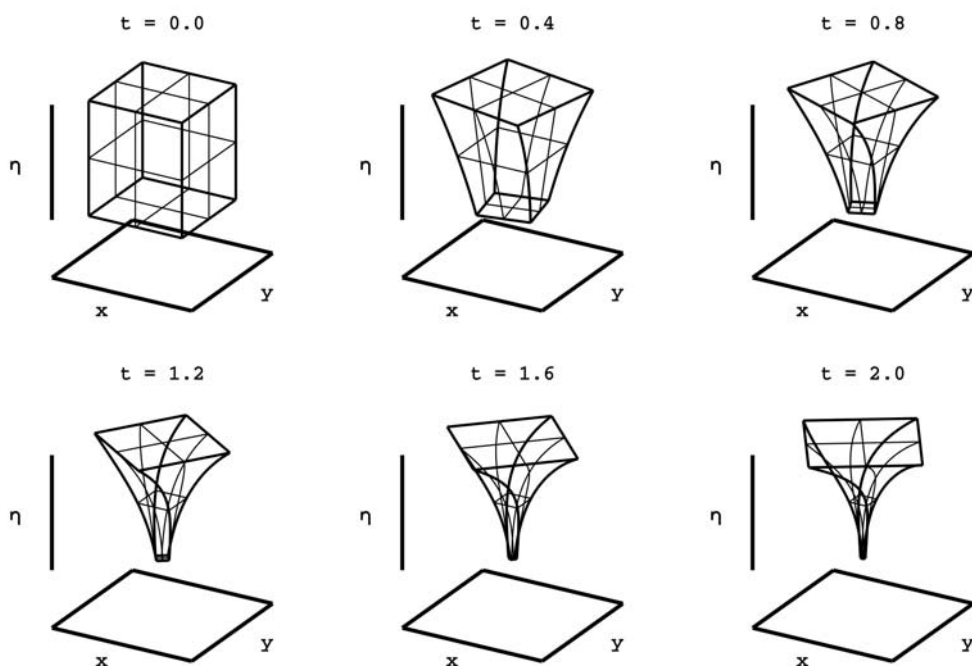


Рис. 9. Множество решений системы в трехмерном пространстве

Здесь наблюдается закручивание множества в спиралевидную воронку. Для алгоритма адаптивной интерполяции это приводит к постоянному увеличению плотности сетки по измерению  $\eta$ . В плоскости  $x, y$  при каждом конкретном значении  $\eta$  соответствующие сечения множества претерпевают линейные деформации растяжения и вращения.

Библиотеки AWA и VNODE-LP работают быстрее всех (таблица 4), но при этом они дают очень завышенные оценки решений и спустя некоторое время аварийно завершают расчет.

На рис. 10 представлено сравнение решений, полученных указанными библиотеками.

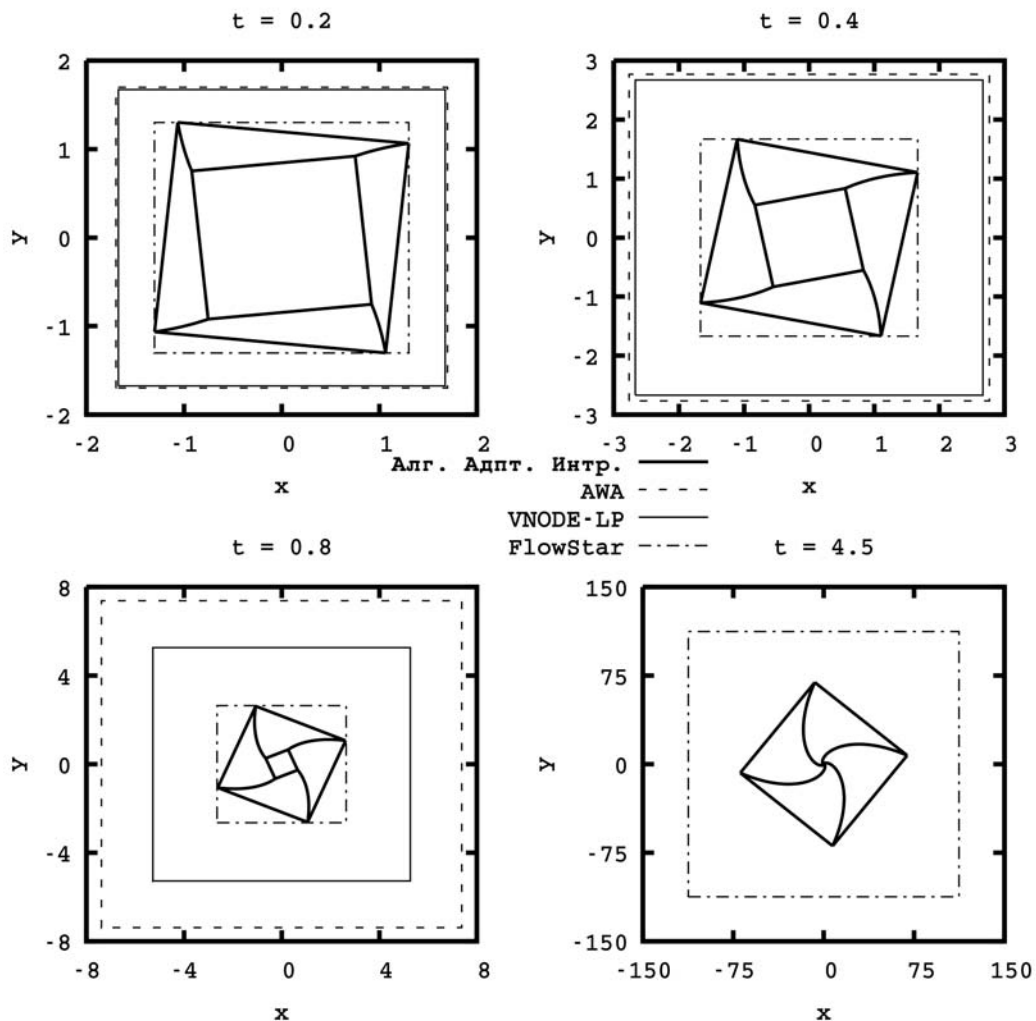


Рис. 10. Сравнение решений системы, полученных различными библиотеками, в различные моменты времени

Таблица 4

**Сравнение результатов решения системы в момент времени 0,8**

Библиотека	Время, с	x	y
Точное решение	—	[-2,620102; 2,620102]	[-2,620102; 2,620102]
Алг. адпт. интр.	0,055	[-2,620102; 2,620102]	[-2,620102; 2,620102]
AWA	0,008	[-7,379424; 7,379424]	[-7,379424; 7,379424]
VNODE-LP	0,004	[-5,270461; 5,270461]	[-5,270461; 5,270461]
FlowStar	0,072	[-2,642752; 2,642752]	[-2,642752; 2,642752]



В целом, как и в предыдущих примерах, библиотека FlowStar проявляет себя лучше, чем AWA и VNODE-LV, с точки зрения получаемых результатов. Но тем не менее из-за того, что метод, реализованный в ней, подвержен накоплению ошибок, спустя некоторое время от начала интегрирования получаемые интервальные оценки начинают расходиться.

## Заключение

Выполнен обзор существующих библиотек и реализованных в них методов моделирования динамических систем с интервальными параметрами. Рассмотрены доступные библиотеки программ гарантированных вычислений AWA, VNODE-LP, COSY Infinity, RiOT, FlowStar, а также авторский алгоритм адаптивной интерполяции. Методы, реализованные в библиотеках AWA и VNODE-LP, просты и нетребовательны в плане вычислительных ресурсов, но эффективны в задачах, где интервалы не слишком велики или где нелинейность системы ОДУ проявляется слабо. Библиотеки COSY Infinity, RiOT и FlowStar основаны на символьно-интервальных вычислениях и область их применения значительно шире по сравнению с библиотеками AWA и VNODE-LP. Однако они тоже имеют тенденцию к завышению интервальных оценок. За счет использования принципиально другого подхода к построению решений алгоритм адаптивной интерполяции не подвержен накоплению ошибок, определяет границы решений с контролируемой точностью и работает значительно быстрее аналогов.

### Литература

1. Павлов Б.М., Новиков М.Д. Автоматизированный практикум по нелинейной динамике (синергетике). – Диалог МГУ, ВМК, 2000. – 115 с.
2. Красильников П.С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. – 528 с.
3. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
4. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
5. Архипов А.С., Семенихин К.В. Гарантирующее оценивание параметров одномерной модели движения по вероятностному критерию при наличии унимодальных помех // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С.31–38.
6. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
8. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
9. Золотарев В.М. Общая теория перемножения независимых случайных величин // Доклады АН СССР. Т. 142. № 4. 1962. С. 788–791.
10. Young R.C. The algebra of many-valued quantities // Mathematische Annalen. Vol. 104. 1931. P. 260–290.
11. Dwyer P.S. Linear Computations. New York: John Wiley & Sons, 1951.
12. Warmus M. Calculus of Approximations // Bulletin de l'Academie Polonaise de Sciences. Vol. 4. № 5. 1956. P. 253–259.
13. Sunaga T. Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis // RAAG Memoirs. Vol. 2. 1958. P. 547–564.
14. Moore R.E. Interval Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
15. Lohner R.J. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems // Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages. 1987. P. 255–286.
16. Hansen E. Interval Arithmetic in Matrix Computations Part I // SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 2, № 2. 1965. P. 308–320.



17. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
18. Krawczyk R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken // Computing. Vol. 4. № 3. 1969. P. 187–201.
19. Nickel K. Über die Notwendigkeit einer Fehlerschranken-Arithmetic für Rechenautomaten // Numerische Mathematik. Vol. 9. № 1. 1966. P. 69–79.
20. Neumaier A. Interval Methods for Systems and Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
21. Брадис В.М. Теория и практика вычислений. Пособие для высших педагогических учебных заведений. М.: Учпедгиз, 1937.
22. Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. Т. 3. № 5. 1962. С. 701–709.
23. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
24. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. М.: Наука, 1981.
25. Добронеев Б.С., Попова О.А. Численный вероятностный анализ неопределенных данных. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2014. 168 с.
26. Добронеев Б.С. Интервальная математика. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т., 2007.
27. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2017.
28. Рогалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. Т. 8. № 5. 2003. С. 102–116.
29. Рогалев А.Н. Вопросы реализации гарантированных методов включения выживающих траекторий управляемых систем // Сибирский журнал науки и технологий. № 2(35). 2011. С. 54–58.
30. Рогалев А.Н. Исследование и оценка решений обыкновенных дифференциальных уравнений интервально-символьными методами // Вычислительные технологии. Т. 4. № 4. 1999. С. 51–75.
31. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Модификация методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Труды МАИ. № 89. 2016. С. 1–20.
32. Eijgenraam P. The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic: Formulation and Analysis of an Algorithm. Amsterdam : Mathematisch Centrum, 1981. P. 185.
33. Lohner R.J. Einschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs und Randwertaufgaben und Anwendungen. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 1988.
34. Nedialkov N.S., Jackson K.R., Pryce J.D. An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an IVP for an ODE // Reliable Computing, Vol. 7. № 6. 2001. P. 449–465.
35. Stauning O. Automatic Validation of Numerical Solutions. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1997.
36. Lin Y., Stadtherr M.A. Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs. // Applied Numerical Mathematics. Vol 57. № 10. 2007. P. 1145–1162
37. Nedialkov N.S. VNODE-LP – a validated solver for initial value problems in ordinary differential equations. Technical Report CAS-06–06-NN, Department of Computing and Software, McMaster University, 2006.
38. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models // Reliable Computing. Vol. 4. № 4. 1998. P. 361–369.
39. Berz M., Makino K. Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: long-term stabilization by shrink wrapping // Differential Equations and Applications. Vol. 10. № 4. 2005. P. 385–403.
40. Berz M., Makino K. Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: long-term stabilization by preconditioning // Differential Equations and Applications. Vol. 10. № 4. 2005. P. 353–384.
41. Makino K., Berz M. Efficient control of the dependency problem based on Taylor model methods // Reliable Computing. Vol. 5. № 1. 1999. P. 3–12.





42. Makino K., Berz M. Taylor models and other validated functional inclusion methods // Pure and Applied Mathematics Vol. 4. № 4. 2003. P. 379–456.
43. Makino K., Berz M. Verified Computations Using Taylor Models and Their Applications // Numerical Software Verification 2017: conference proceedings. (Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017). Springer International Publishing AG 2017. P. 3–13.
44. Neher M., Jackson K.R., Nedialkov N.S., On Taylor Model Based Integration of ODEs // SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 45. № 1. 2007. P. 236–262.
45. Nataraj P.S. V., Sondur S., The Extrapolated Taylor Model // Reliable Computing, Vol. 15. 2011. P. 251–278.
46. Позин А.В. Обзор методов и инструментальных средств решения задачи Коши для ОДУ с гарантированной оценкой погрешности // Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», 30 мая – 4 июня 2011 г. Новосибирск. Тезисы. ИБТ СО РАН, 2011.
47. Berz M. COSY INFINITY version 8 reference manual. Technical Report MSUCL–1088, National Superconducting Cyclotron Lab., Michigan State University, 1997.
48. Eble I. Über Taylor-Modelle: Dissertation zur erlangung des akademischen grades eines doktors der naturwissenschaften, Karlsruhe Institute of Technology, 2007.
49. Chen X., Sankaranarayanan S. Decomposed Reachability Analysis for Nonlinear Systems. // 2016 IEEE Real-Time Systems Symposium (RTSS): conference proceedings. (Porto, Portugal, 29 Nov.- 2 Dec. 2016). P. 13–24.
50. Chen X., Abraham E., Sankaranarayanan S. FLOW\*: An Analyzer for Non-linear Hybrid Systems // Proceedings of the 25th International Conference on Computer Aided Verification. (Saint Petersburg, Russia, July 13–19, 2013), Springer-Verlag New York, Vol. 8044, p. 258–263.
51. Rump S.M. INTLAB – INTerval LABoratory. In Tibor Csendes, editor, Developments in Reliable Computing, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, p. 77–104.
52. Makino K., Berz M. Rigorous Reachability Analysis and Domain Decomposition of Taylor Models // Numerical Software Verification 2017: conference proceedings. (Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017). Springer International Publishing AG 2017, p. 90–97.
53. Kletting M., Rauh A., Aschemann H., Hofer E.P., Consistency tests in guaranteed simulation of nonlinear uncertain systems with application to an activated sludge process // Computational and Applied Mathematics. Vol. 199. № 2. 2007. P. 213–219.
54. Dobronets B.S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // Interval Computation. 1992. Vol. 1. № 3. P. 6–19.
55. Добронетц Б.С., Рощина Е.Л. Приложения интервального анализа чувствительности // Вычислительные технологии. Т. 7. № 1. 2002. С. 75–82.
56. Некрасов С.А. Эффективные двусторонние методы для решения задачи Коши в случае больших промежутков интегрирования // Дифференциальные уравнения. Т. 39. № 7. 2003. С. 969–973.
57. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазовых состояний динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
58. Kurzhanski A. B., Vdlyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. SCFA. Boston, 1997.
59. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями // Дифференциальные уравнения. Т. 54. № 7. 2018. С. 963–974.
60. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гидаснов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Математическое моделирование. Т. 30. № 12. 2018. С. 129–144.
61. Morozov A. Yu., Reviznikov D.L. Modelling of dynamic systems with interval parameters on graphic processors // Программная инженерия. Т. 10. 2. 2019. С. 69–76.
62. Морозов А.Ю. Программа для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018664623 от 20 ноября 2018 г.



63. *Пантелеев А.В., Скавинская Д.В.* Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации М.: Вузовская книга. 2019 г., 332 с.
64. *Hansen E., Walster G.W.*, Global Optimization Using Interval Analysis. New York: Marcel Dekker, 2004.
65. *Panteleev A.V., Panovskiy V.N.* Interval methods of global constrained optimization. Interval Analysis: Introduction, Methods and Applications. Nova Science Publishers, Inc. 2017. с. 33–119.
66. *Пантелеев А.В., Пановский В.Н.* Обобщенный инверсный интервальный метод глобальной условной оптимизации // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. № 207. 2014. с. 17–24.
67. *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* Метод прохождения точек бифуркации коразмерности три // Прикладная математика и механика (Ульяновск). № 9. 2011. с. 335–346.
68. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 57. № 6. 2017. С. 934–957
69. *Neher M.* Interval methods and Taylor model methods for ODEs // Workshop Taylor Model Methods VII, 14–17 december 2011 y. Florida. Abstracts. MSU 2011, P. 17.
70. *Makino K., Berz M.* Suppression of the wrapping effect by Taylor model – based validated integrators: MSU HEP Report 40910, 2003.
71. *Büniger F.* Shrink wrapping for Taylor models revisited // Numerical Algorithms. № 4. 2018. P. 1–18.



# Modeling of dynamic systems with interval parameters. Review of methods and software tools

**Morozov A. Yu. \***

Federal Research Center Computer

Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

morozov@infway.ru

**Reviznikov D.L. \*\***

Federal Research Center Computer Science and Control

of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

reviznikov@gmail.com

The paper provides a review of existing libraries and methods of modeling dynamic systems with interval parameters. Available software libraries AWA, VNODE-LP, COZY Infinity, RiOT, FlowStar, as well as the author's adaptive interpolation algorithm are considered. The traditional software for interval analysis gives guaranteed estimates of solutions, however, over time, these estimates become extremely significantly overstated. Due to the use of a fundamentally different approach to constructing solutions, the adaptive interpolation algorithm is not subject to the accumulation of errors, determines the boundaries of solutions with controlled accuracy, and works much faster than analogues.

**Keywords:** interval methods, dynamic systems with interval parameters, adaptive interpolation algorithm, libraries with methods, AWA, VNODE, COSY Infinity, RiOT, FlowStar, verifyode.

## References

1. Pavlov B.M., Novikov M.D. Avtomatizirovannyj praktikum po nelinejnoj dinamike (sinergetike) [Automated workshop on nonlinear dynamics (synergetics)]. – Dialog MGU, VMK, 2000. – 115 p.

## For citation:

Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modeling of dynamic systems with interval parameters. Review of methods and software tools. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 5–31. doi: 10.17759/mda.2019090401 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Alexander Yu. Morozov**, Ph.D. in Physics and Mathematics, Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: morozov@infway.ru

\*\***Dmitry L. Reviznikov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia. Email: reviznikov@gmail.com



2. Krasilnikov P.S. Prikladnye metody issledovaniya nelinejnyh kolebanij [Applied methods for studying nonlinear oscillations]. M. – Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij [Institute for Computer Research], 2015. – 528 p.
3. Rybakov K.A., Rybin V.V. Modelirovanie raspredeennyh i drobno-raspredeennyh processov i sistem upravleniya spektral'nym metodom [Modeling of distributed and fractionally distributed processes and spectral method control systems]. M.: Izd-vo MAI [Publishing House of the Moscow Aviation Institute], 2016. – 160 p.
4. Panteleev A.V., Rybakov K.A. Prikladnoj veroyatnostnyj analiz nelinejnyh sistem upravleniya spektral'nym metodom [Applied probabilistic analysis of nonlinear spectral method control systems]. M.: Izd-vo MAI-PRINT [Publishing house MAI-PRINT], 2010. – 160 p.
5. Arkhipov A.S., Semenikhin K.V. Garantirujushhee ocenivanie parametrov odnomernoj modeli dvizheniya po veroyatnostnomu kriteriju pri nalichii unimodal'nyh pomeh [A guaranteeing estimation of the parameters of a one-dimensional motion model according to a probabilistic criterion in the presence of unimodal interference] // *Modelirovanie i analiz dannyh* [Modeling and data analysis]. 2019. No 2. Pp.31–38.
6. Sobol' I.M. Metod Monte-Karlo [Monte Carlo Method]. M.: Nauka, 1978.
7. Ermakov S.M., Mihajlov G.A. Statisticheskoe modelirovanie [Statistical Modeling]. M.: Nauka, 1982.
8. Kramer G. Matematicheskie metody statistiki [Mathematical Statistics Methods]. M.: Mir, 1975.
9. Zolotarev V.M. Obshchaya teoriya peremnozheniya nezavisimyh sluchajnyh velichin [General Theory of Multiplication of Independent Random] // *Doklady AN SSSR*. V. 142. № 4. 1962. Pp. 788–791.
10. Young R.C. The algebra of many-valued quantities // *Mathematische Annalen*. Vol. 104. 1931. P. 260–290.
11. Dwyer P.S. Linear Computations. New York: John Wiley & Sons, 1951.
12. Warmus M. Calculus of Approximations // *Bulletin de l'Academie Polonaise de Sciences*. Vol. 4. № 5. 1956. P. 253–259.
13. Sunaga T. Theory of an Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis // *RAAG Memoirs*. Vol. 2. 1958. P. 547–564.
14. Moore R.E. Interval Analysis. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
15. Lohner R.J., Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems // *Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages*. 1987. P. 255–286.
16. Hansen E. Interval Arithmetic in Matrix Computations Part I // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Vol. 2, № 2. 1965. P. 308–320.
17. Alefel'd G., Herberger YU. Vvedenie v interval'nye vychisleniya [Introduction to Interval Computing]. M.: Mir [World], 1987.
18. Krawczyk R. Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken // *Computing*. Vol. 4. № 3. 1969. P. 187–201.
19. Nickel K. Über die Notwendigkeit einer Fehlerschranken-Arithmetic für Rechenautomaten // *Numerische Mathematik*. Vol. 9. № 1. 1966. P. 69–79.
20. Neumaier A. Interval Methods for Systems and Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
21. Bradis V.M. Teoriya i praktika vychislenij. Posobie dlya vysshih pedagogicheskikh uchebnyh zavedenij [Theory and practice of computing. Manual for higher pedagogical educational institutions]. M.: Uchpedgiz, 1937.



22. Kantorovich L.V. O nekotoryh novyh podhodah k vychislitel'nyh metodam i obrabotke nablyudenij [About some new approaches to computational methods and processing of observations] // *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [Siberian Mathematical Journal] V. 3. № 5. 1962. Pp. 701–709.
23. Kalmykov S.A., SHokin YU.I., YUldashev Z.H. Metody interval'nogo analiza [Interval Analysis Methods]. Novosibirsk: Nauka, 1986.
24. Shokin Yu.I. Interval'nyj analiz [Interval analysis]. M.: Nauka, 1981.
25. Dobronets B.S., Popova O.A. Chislennyj veroyatnostnyj analiz neopredelennyh dannyh [Numerical probabilistic analysis of uncertain data]. *Krasnojarsk: Sib. feder. un-t* [Krasnojarsk: Siberian Federal University], 2014. 168 p.
26. Dobronets B.S. Interval'naja matematika. [Interval math]. *Krasnojarsk: Krasnojarsk gos. un-t* [Krasnojarsk: Krasnojarsk State University]. 2007.
27. Shary S.P. Konechnomernyj interval'nyj analiz [Finite dimensional interval analysis]. Novosibirsk: XYZ, 2017.
28. Rogalev A.N. Garantirovannye metody reshenija sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij na osnove preobrazovanija simvol'nyh formul [Guaranteed methods for solving systems of ordinary differential equations based on the transformation of symbolic formulas] // *Vychislitel'nye tehnologii* [Computational technologies]. Vol. 8. No. 5. 2003. Pp. 102–116.
29. Rogalev A.N. Voprosy realizacii garantirovannyh metodov vkljuchenija vyzhivajushchih traektorij upravljajemyh sistem [Implementation issues on guaranteed methods for including surviving trajectories of controlled systems] // *Sibirskij zhurnal nauki i tehnologii* [Siberian Science and Technology Journal]. No. 2 (35). 2011. Pp. 54–58.
30. Rogalev A.N. Issledovanie i ocenka reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij interval'no-simvol'nymi metodami. [Research and evaluation of solutions of ordinary differential equations by interval-symbolic methods] // *Vychislitel'nye tehnologii* [Computational technologies]. Vol. 4. No. 4. 1999. Pp. 51–75.
31. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modifikacija metodov reshenija zadachi Koshi dlja sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s interval'nymi parametrami [Modification of methods for solving the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with interval parameters] // *Trudy MAI* [Transactions of MAI]. No. 89.2016. Pp. 1–20.
32. Eijgenraam P. The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic: Formulation and Analysis of an Algorithm. Amsterdam : Mathematisch Centrum, 1981. P. 185.
33. Lohner R.J. Einschließung der Lösung gewöhnlicher Anfangs und Randwertaufgaben und Anwendungen. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 1988.
34. Nedialkov N.S., Jackson K.R., Pryce J.D. An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an IVP for an ODE // *Reliable Computing*, Vol. 7. № 6. 2001. P. 449–465.
35. Stauning O. Automatic Validation of Numerical Solutions. PhD thesis, Technical University of Denmark, 1997.
36. Lin Y., Stadtherr M.A. Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs. // *Applied Numerical Mathematics*. Vol 57. № 10. 2007. P. 1145–1162
37. Nedialkov N.S. VNODE-LP – a validated solver for initial value problems in ordinary differential equations. Technical Report CAS-06–06-NN, Department of Computing and Software, McMaster University, 2006.



38. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models // *Reliable Computing*. Vol. 4. № 4. 1998. P. 361–369.
39. Berz M., Makino K. Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: long-term stabilization by shrink wrapping // *Differential Equations and Applications*. Vol. 10. № 4. 2005. P. 385–403.
40. Berz M., Makino K. Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: long-term stabilization by preconditioning // *Differential Equations and Applications*. Vol. 10. № 4. 2005. P. 353–384.
41. Makino K., Berz M. Efficient control of the dependency problem based on Taylor model methods // *Reliable Computing*. Vol. 5. № 1. 1999. P. 3–12.
42. Makino K., Berz M. Taylor models and other validated functional inclusion methods // *Pure and Applied Mathematics* Vol. 4. № 4. 2003. P. 379–456.
43. Makino K., Berz M. Verified Computations Using Taylor Models and Their Applications // *Numerical Software Verification 2017: conference proceedings*. (Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017). Springer International Publishing AG 2017. P. 3–13.
44. Neher M., Jackson K.R., Nedialkov N.S., On Taylor Model Based Integration of ODEs // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 45. № 1. 2007. P. 236–262.
45. Nataraj P.S. V., Sondur S., The Extrapolated Taylor Model // *Reliable Computing*, Vol. 15. 2011. P. 251–278.
46. Pozin A.V. Obzor metodov i instrumental'nyh sredstv reshenija zadachi Koshi dlja ODU s garantirovannoj ocenкой pogreshnosti [A review of methods and tools for solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with a guaranteed error estimate] // *Mezhdunarodnaja konferencija «Sovremennye problemy prikladnoj matematiki i mehaniki: teorija, jeksperiment i praktika» [International Conference “Modern Problems of Applied Mathematics and Mechanics: Theory, Experiment and Practice”]*, May 30 – June 4, 2011, Novosibirsk Abstracts. Information and Computing Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2011.
47. Berz M. COSY INFINITY version 8 reference manual. Technical Report MSUCL–1088, National Superconducting Cyclotron Lab., Michigan State University, 1997.
48. Eble I. Über Taylor-Modelle: Dissertation zur erlangung des akademischen grades eines doktors der naturwissenschaften, Karlsruhe Institute of Technology, 2007.
49. Chen X., Sankaranarayanan S. Decomposed Reachability Analysis for Nonlinear Systems. // *2016 IEEE Real-Time Systems Symposium (RTSS): conference proceedings*. (Porto, Portugal, 29 Nov.-2 Dec. 2016). P. 13–24.
50. Chen X., Abraham E., Sankaranarayanan S. FLOW\*: An Analyzer for Non-linear Hybrid Systems // *Proceedings of the 25th International Conference on Computer Aided Verification*. (Saint Petersburg, Russia, July 13–19, 2013), Springer-Verlag New York, Vol. 8044, p. 258–263.
51. Rump S.M. INTLAB – INTerval LABoratory. In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, p. 77–104.
52. Makino K., Berz M. Rigorous Reachability Analysis and Domain Decomposition of Taylor Models // *Numerical Software Verification 2017: conference proceedings*. (Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017). Springer International Publishing AG 2017, p. 90–97.
53. Kletting M., Rauh A., Aschemann H., Hofer E.P., Consistency tests in guaranteed simulation of nonlinear uncertain systems with application to an activated sludge process // *Computational and Applied Mathematics*. Vol. 199. № 2. 2007. P. 213–219.



54. Dobronets B.S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations // *Interval Computation*. 1992. Vol. 1. № 3. P. 6–19.
55. Dobronets B.S., Roshchina E.L. Prilozhenija interval'nogo analiza chuvstvitel'nosti. [Applications of interval sensitivity analysis] // *Vychislitel'nye tehnologii [Computational technologies]*. Vol. 7. Number 1. 2002. Pp. 75–82.
56. Nekrasov S.A. Efficient Two-Sided Methods for the Cauchy Problem in the Case of Large Integration Intervals // *Differential Equations*, 2003, V. 39, I. 7, Pp 1023–1027.
57. Chernousko F.L. Ocenivanie fazovyh sostojanij dinamicheskikh sistem. [Estimation of phase states of dynamical systems]. *Metod jellipsoidov [Ellipsoid method]*. M.: Nauka, 1988. 319 p.
58. Kurzhanski A. B., Vdlyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. *SCFA. Boston*, 1997.
59. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Adaptive interpolation algorithm based on a kd-tree for numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval initial conditions. *Differential Equations*, 2018, Vol. 54, No. 7, p. 945–956.
60. Morozov A.Y., Reviznikov D.L., Gidasov V.Y. Adaptive Interpolation Algorithm Based on a kd-Tree for the Problems of Chemical Kinetics with Interval Parameters // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2019, V. 11, I. 4, pp 622–633
61. Morozov A. Yu., Reviznikov D.L. Modelling of dynamic systems with interval parameters on graphic processors // *Programmijazh inzhenerija*. Vol. 10. No 2. 2019. Pp. 69–76.
62. Morozov A.Yu. Programma dlja chislennogo integrirovaniya sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s interval'nymi nachal'nymi uslovijami [A program for the numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval initial conditions] // *Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlja JeVM [Certificate of state registration of a computer program]* No. 2016464623 dated November 20, 2018
63. Panteleev A.V., Skavinskaja D.V. Metajevristicheskie algoritmy global'noj optimizacii [Global optimization metaheuristic algorithms] M.: Vuzovskaja kniga [University book]. 2019., 332 p.
64. Hansen E., Walster G.W., *Global Optimization Using Interval Analysis*. New York: Marcel Dekker, 2004.
65. Panteleev A.V., Panovskiy V.N. Interval methods of global constrained optimization. Interval Analysis: Introduction, Methods and Applications. *Nova Science Publishers, Inc*. 2017. pp. 33–119.
66. Panteleev A.V., Panovskij V.N. Obobshchennyj inversnyj interval'nyj metod global'noj uslovnoj optimizacii [Generalized inverse interval method of global conditional optimization] // *Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoj aviacii [Scientific Bulletin of Moscow State Technical University of Civil Aviation]*. № 207. 2014. Pp. 17–24.
67. Krasnikov S.D., Kuznecov E.B. Metod prohozhdeniya tocek bifurkacii korazmernosti tri [A method for traversing bifurcation points of codimension three] // *Prikladnaya matematika i mekhanika (Ul'yanovsk) [Applied Mathematics and Mechanics (Ulyanovsk)]*. № 9. 2011. s. 335–346.
68. Kuznecov E.B., Leonov S.S. Parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. V.57. Pp. 931–952.



69. Neher M. Interval methods and Taylor model methods for ODEs // *Workshop Taylor Model Methods VII*, 14–17 december 2011 y. Florida. Abstracts. MSU 2011, P. 17.
70. Makino K., Berz M.: Suppression of the wrapping effect by Taylor model – based validated integrators: MSU HEP Report 40910, 2003.
71. Bünger F. Shrink wrapping for Taylor models revisited // *Numerical Algorithms*. № 4. 2018. P. 1–18.



## **Анализ модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат и конечном спросе на продукцию**

***Пантелеев А.В.\****

МАИ, Москва, Россия  
avpanteleev@inbox.ru

***Савельева В.С.\*\****

МАИ, Москва, Россия  
verassavel@mail.ru

В статье рассматривается формирование и исследование математической модели выполнения производственного задания при наличии нечеткой информации о матрицах прямых затрат и конечного спроса. Под решением задачи с нечеткой информацией понимается решение линейной системы уравнений с нечеткой матрицей и нечеткой правой частью, описываемых с помощью нечетких треугольных чисел в форме отклонений от среднего значения. В данной задаче поиска межотраслевого баланса применяется метод LU-разложения для матрицы прямых затрат, который далее используется для решения системы линейных уравнений. Описана программная реализация численного метода поиска сильного решения полностью нечеткой системы линейных алгебраических уравнений, состоящая из двух последовательных этапов. На первом этапе проверяются необходимые и достаточные условия существования сильного решения. На втором этапе находится решение системы, которое записывается в виде нечеткой матрицы. Проведено исследование влияния разброса параметров нечетких чисел на итоговый результат.

***Ключевые слова:*** нечеткая логика, полностью нечеткая линейная система алгебраических уравнений, треугольные числа, программное обеспечение.

**Для цитаты:**

*Пантелеев А.В., Савельева В.С.* Анализ модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат и конечном спросе на продукцию // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 32–45. doi: 10.17759/mda.2019090402

**\*Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: avpanteleev@inbox.ru

**\*\*Савельева Вера Сергеевна**, студент бакалавриата факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: verassavel@mail.ru



## Введение

В процессе функционирования многоотраслевой экономики каждая отрасль выступает, с одной стороны, производителем некоторой продукции, а, с другой стороны, потребителем продукции, произведенной другими отраслями. При этом возникает проблема нахождения объема производства каждой из отраслей, достаточного для выполнения производственного задания. Для ее решения предложена математическая модель, сводящая проблему к решению системы линейных алгебраических уравнений [1]. При этом считается, что все параметры модели известны точно. Однако в практике экономических расчетов обычно имеется неопределенность параметров, описываемая интервалами возможных значений. Кроме того, численному значению из интервала может быть поставлена в соответствие степень уверенности, которая в теории нечетких множеств задается так называемыми функциями принадлежности [4; 5; 6]. Одним из возможных типов функций принадлежности являются треугольные, которые задают треугольные числа.

Предлагается сформировать нечеткий аналог математической модели выполнения производственного задания, в которой элементы матриц прямых затрат и вектора конечного спроса задаются треугольными числами. При этом система линейных уравнений трактуется как полностью нечеткая, решение которой ищется в классе треугольных нечетких чисел [4; 5]. Различные методы решения таких систем предложены в [6; 7; 8]. Авторами описан алгоритм решения полностью нечеткой системы уравнений, который реализован в виде программного обеспечения, эффективность которого продемонстрирована в ходе анализа нечеткой модели. В случае четкой матрицы системы, но нечеткого описания правых частей, могут быть использованы методы, описанные в [3].

### **Задача описания и анализа модели выполнения производственного задания при наличии четкой информации**

Рассмотрим классическую задачу анализа взаимосвязи между различными секторами экономики, производящими товары и услуги [1]. В качестве единицы измерения объемов товаров и услуг каждого сектора выберем их стоимость. Произведенная каждой конкретной отраслью продукция разделяется на две части: промежуточную продукцию, которая продается отрасли–покупателю, использующей ее в дальнейшем для производства других видов продукции; конечную продукцию, которая продается покупателю, не использующему ее в сфере производства. В соответствии с этим делением спрос также подразделяется на промежуточный и конечный. Конечный спрос определяется личным потреблением, экспортом и т.д. Он оценивается в результате исследования рынка. Конечный спрос определяет объем конечной продукции во всех секторах. Регулирующий орган выдает производственное задание по каждому сектору.

Требуется найти, сколько продукции следует произвести в каждом секторе экономики, чтобы выполнить производственное задание.

Введем обозначения:  $n$  – количество секторов экономики;  $x_i$  – объем выпуска продукции  $i$ -го сектора;  $b_{ij}$  – объем товаров и услуг  $i$ -го сектора, потребляемых в  $j$ -м секторе;  $f_i$  – объем конечной продукции  $i$ -го сектора;  $t_i$  – объем производственного задания  $i$ -го сектора.



Составим уравнение выполнения производственного задания – равенство объема задания каждого сектора суммарному объему его продукции, потребляемой другими секторами производства, и конечной продукции:  $t_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} + f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначая  $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{x_j}$  – объем продукции  $i$ -го сектора, который расходуется при производстве одной единицы продукции  $j$ -го сектора, перепишем уравнение в виде

$$t_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$  называются коэффициентами прямых затрат. Уравнение (1) описывает потоки товаров и услуг между секторами экономики в течение фиксированного промежутка времени, например, в течение года. Перепишем (1) в матричной форме. Для этого обозначим:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  – матрица-столбец объемов выпуска;  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$  – матрица-столбец конечного спроса (конечной продукции);  $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$  – матрица-столбец производственного задания;  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  – структурная матрица экономики (матрица прямых затрат). Используя эти обозначения, перепишем (1) в виде

$$t = Ax + f, \quad \text{или} \quad Ax = t - f. \quad (2)$$

Требуется определить, каким должен быть объем выпуска продукции в каждом секторе экономики, чтобы выполнить производственное задание. Другими словами, требуется найти решение  $x$  системы уравнений (2) при заданной матрице  $A$  прямых затрат и заданным столбцам  $f$  конечного спроса и  $t$  производственного задания. Учитывая экономический смысл, допустимым считается решение  $x$ , все элементы которого неотрицательные.

### **Задача описания и анализа модели выполнения производственного задания при наличии нечеткой информации**

На практике при задании элементов матриц, описывающих математическую модель, информация может быть размытой, т.е. представляться некоторым отрезком возможных значений. Более того, возможен случай, когда задается четкое значение и границы отрицательного и положительного изменений относительно четкого значения. В этом случае можно описать элементы матриц с помощью нечетких чисел и операций над ними, в частности треугольных чисел. Приведем основные определения, которые будут использоваться при составлении нечеткой математической модели выполнения производственного задания [4; 5].



$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{\alpha}, m-\alpha \leq x < m, \alpha > 0, \\ 1 - \frac{x-m}{\beta}, m \leq x \leq m+\beta, \beta > 0, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

1. Треугольное нечеткое число  $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$  задается функцией принадлежности (рис. 1) Число  $\tilde{0} = (0, 0, 0)$  считается нулевым треугольным нечетким числом.



Рис. 1. Представление треугольного нечеткого числа

2. Нечеткое число  $\tilde{A}$  называется положительным ( $\tilde{A} > 0$ ), если его функция принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \forall x \leq 0$ , и отрицательным ( $\tilde{A} < 0$ ), если его функция принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \forall x \geq 0$ . Число  $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$  является положительным, если  $m - \alpha \geq 0$ .
3. Два нечетких треугольных числа  $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$  и  $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$  равны тогда и только тогда, когда  $m = n, \alpha = \gamma, \beta = \delta$ .
4. Суммой двух нечетких треугольных чисел  $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$  и  $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$  называется число

$$(m, \alpha, \beta) \oplus (n, \gamma, \delta) = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta). \quad (3)$$

5. Произведение двух положительных нечетких чисел  $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta) > 0$  и  $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta) > 0$  при малых значениях  $\alpha, \beta$  по сравнению с  $m$  и малых  $\gamma, \delta$  по сравнению с  $n$  приближенно определяется, как нечеткое число

$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta). \quad (4)$$

В частном случае умножения на четкое число  $\lambda$ :

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta), \lambda > 0, \\ (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha), \lambda < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Когда разброс, характеризуемый  $\alpha, \beta$  и  $\gamma, \delta$ , не является малым, может быть использована более точная формула умножения

$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta). \quad (6)$$



6. Матрица  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  называется нечеткой, если каждый ее элемент представляется нечетким числом.

Нечеткая матрица называется положительной ( $\tilde{A} > \tilde{0}$ ), если каждый ее элемент положителен.

Нечеткая матрица может быть представлена в форме  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = ((a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}))$ , или  $\tilde{A} = (A, M, N)$ , где  $A = (a_{ij}), M(\alpha_{ij}), N(\beta_{ij})$  – три матрицы с четкими элементами.

7. Квадратная нечеткая матрица  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  называется верхней треугольной, если  $\tilde{a}_{ij} = \tilde{0} = (0, 0, 0) \forall i > j$ , и нижней треугольной, если  $\tilde{a}_{ij} = \tilde{0} = (0, 0, 0) \forall i < j$ .

8. Система вида

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b} \quad (7)$$

с нечеткой квадратной матрицей  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$  и нечеткой матрицей  $\tilde{b} = (\tilde{b}_j)$  размеров  $n \times 1$  называется полностью нечеткой линейной системой. В расширенной форме ее можно переписать

$$(\tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{1n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_1,$$

$$(\tilde{a}_{21} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{2n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_2,$$

⋮

$$(\tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_n.$$

## Методы решения полностью нечетких линейных систем

В [4] предложен метод нахождения положительного решения  $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$  полностью нечеткой линейной системы  $\tilde{A} \times \tilde{x} = \tilde{b}$  с  $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$ , матрица  $A$  невырожденная,  $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$  при выполнении предположений о малых значениях  $\alpha, \beta$  по сравнению с  $m$  и малых  $\gamma, \delta$  по сравнению с  $n$ :

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b, \\ y &= A^{-1}(g - Mx), \\ z &= A^{-1}(h - Nx). \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения решения  $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$  требуется последовательно применить формулы в (8).

В [7] сформулированы условия, при которых полностью нечеткая система имеет положительное решение:

матрица  $A$  невырожденная;  $A^{-1}(E + MA^{-1})b \geq A^{-1}h$ ;  $A^{-1}h \geq A^{-1}(MA^{-1})b$ ;  $A^{-1}g \geq A^{-1}NA^{-1}b$ .

Эти условия заменили более жесткие, предложенные в [8].

В [4] также предложен метод  $LU$  – разложения в задаче

$$(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$$

с матрицей  $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$ , у которой  $\text{rg}A = n$  и при выполнении предположения о малых значениях  $\alpha, \beta$  по сравнению с  $m$  и малых  $\gamma, \delta$  по сравнению с  $n$ :

1. Найти  $LU$  – разложение матрицы  $A$ , например, пользуясь алгоритмом из [2]:  $A = L_1U_1$ , где  $L_1$  – нижняя треугольная матрица с единичной главной диагональю,  $U_1$  – верхняя треугольная матрица.



2. Найти  $U_2 = L_1^{-1}M$ ,  $U_3 = L_1^{-1}N$ .
3. Найти решение  $\tilde{x} = (x, y, z)$ , где

$$\begin{aligned} x &= U_1^{-1}L_1^{-1}b, \\ y &= U_1^{-1}L_1^{-1}(g - L_1U_2x), \\ z &= U_1^{-1}L_1^{-1}(h - L_1U_3x). \end{aligned} \quad (9)$$

Авторами сформировано программное обеспечение в среде Microsoft Visual Studio Express 2012 на языке C#. Его применение продемонстрировано при решении рассмотренного далее примера.

Рассмотрим решение системы  $(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$  в случае, когда не делается предположений о малых значениях  $\alpha, \beta$  по сравнению с  $m$  и малых  $\gamma, \delta$  по сравнению с  $n$ . В этом случае применим более точную формулу умножения вида  $(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta)$ :

$$(Ax, Ay + Mx - My, Az + Nx + Nz) = (b, g, h).$$

Применяя условия равенства нечетких чисел, получаем

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ Ay + Mx - My &= g, \\ Az + Nx + Nz &= h. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b, \\ y &= (A - M)^{-1}(g - Mx), \\ z &= (A + N)^{-1}(h - Nx). \end{aligned} \quad (10)$$

Для получения решения  $\tilde{x} = (x, y, z)$  требуется по заданной системе уравнений составить матрицы  $A, M, N$  и  $b, g, h$ , а затем последовательно применить формулы (10).

### **Пример анализа модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат, конечном спросе и производственном задании**

Рассмотрим задачу анализа модели

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{t} - \tilde{f},$$

которая является нечетким аналогом уравнения  $Ax = t - f$ , где заданы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}. \text{ Поскольку правой частью системы } \tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b},$$

для которой в предыдущем разделе описаны методы решения, является  $\tilde{t} - \tilde{f}$ , то в приведенных алгоритмах матрица  $\tilde{b}$  заменяется на  $\tilde{t} - \tilde{f}$ .

1. Предельный разброс значений элементов матрицы  $\tilde{A}$  составляет 1%, а разбросы значений матриц  $\tilde{t}, \tilde{f}$  составляют 5%:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,3; 0,003; 0,003 & 0,1; 0,001; 0,001 & 0,1; 0,001; 0,001 \\ 0,2; 0,002; 0,002 & 0,2; 0,002; 0,002 & 0,1; 0,001; 0,001 \\ 0,3; 0,003; 0,003 & 0,1; 0,001; 0,001 & 0,4; 0,004; 0,004 \end{pmatrix},$$



$$\tilde{t} = \begin{pmatrix} 120; 6; 6 \\ 150; 7,5; 7,5 \\ 200; 10; 10 \end{pmatrix}, \tilde{f} = \begin{pmatrix} 40; 2; 2 \\ 60; 3; 3 \\ 30; 1,5; 1,5 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0,003 & 0,001 & 0,001 \\ 0,002 & 0,002 & 0,001 \\ 0,003 & 0,001 & 0,004 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,003 & 0,001 & 0,001 \\ 0,002 & 0,002 & 0,001 \\ 0,003 & 0,001 & 0,004 \end{pmatrix};$$

$$t = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}, t_g = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}, t_h = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}, f_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}, f_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\tilde{b} = \tilde{t} - \tilde{f} = (b, g, h)$ , то по формулам (3) и (5) при  $\lambda = -1$  получаем

$$b = t - f = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 170 \end{pmatrix}, g = t_g + f_g = \begin{pmatrix} 8 \\ 10,5 \\ 11,5 \end{pmatrix}, h = t_h + f_h = \begin{pmatrix} 8 \\ 10,5 \\ 11,5 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 9,83333 \\ 33,83333 \\ 8,66667 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 9,83333 \\ 33,83333 \\ 8,66667 \end{pmatrix}, \text{ или } \tilde{x} = \begin{pmatrix} 100; 9,83333; 9,83333 \\ 200; 33,83333; 33,83333 \\ 300; 8,66667; 8,66667 \end{pmatrix}.$$

Применение формул (10) дает

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 9,93266 \\ 34,17508 \\ 8,75421 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 9,73597 \\ 33,49835 \\ 8,58086 \end{pmatrix}.$$

Результаты получены в среде Mathcad 14 (рис. 2).

$$A := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 0.003 & 0.001 & 0.001 \\ 0.002 & 0.002 & 0.001 \\ 0.003 & 0.001 & 0.004 \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} 0.003 & 0.001 & 0.001 \\ 0.002 & 0.002 & 0.001 \\ 0.003 & 0.001 & 0.004 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$tb := \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} \quad tg := \begin{pmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad th := \begin{pmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad fb := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} \quad fg := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad fh := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$b := tb - fb$$

$$g := tg + fg$$

$$h := th + fh$$

Проверка условий существования положительного решения

$$b = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 170 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 8 \\ 10,5 \\ 11,5 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 8 \\ 10,5 \\ 11,5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot [(E + M \cdot A^{-1}) \cdot b - h] = \begin{pmatrix} 90.16667 \\ 166.16667 \\ 291.33333 \end{pmatrix} \quad A^{-1} (h - M \cdot A^{-1} \cdot b) = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix}$$



$$y := (A)^{-1}(g - M \cdot x) \quad A^{-1} \cdot (g - N \cdot A^{-1}b) = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1}b \quad z := (A + N)^{-1}(h - N \cdot x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix}$$

Применение более точных формул (10)

$$y := (A - M)^{-1}(g - M \cdot x) \quad z := (A)^{-1}(h - N \cdot x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 9.93266 \\ 34.17508 \\ 8.75421 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 9.73597 \\ 33.49835 \\ 8.58086 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Решение примера 1 в среде MathCad

Применение формул (9) и созданного программного обеспечения продемонстрировано на рис. 3.

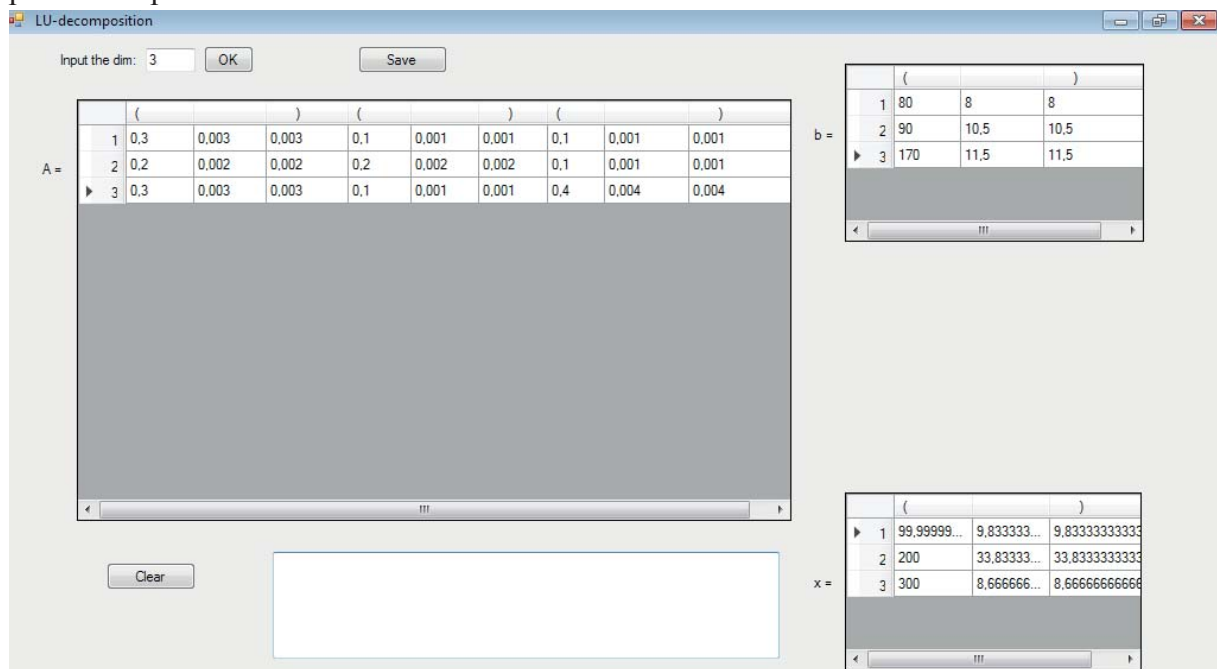


Рис. 3. Результаты расчетов в примере 1.

2. Предельный разброс значений элементов матрицы  $\tilde{A}$  составляет 1 %, а разбросы значений матриц  $\tilde{t}, \tilde{f}$  составляют 10 %, т.е. по сравнению со случаем 1:

$$t_g = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}, t_h = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}; f_g = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, f_h = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ ПОЭТОМУ } g = t_g + f_g = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix}, h = t_h + f_h = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix}.$$





По формулам (8) находим  $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 20,66667 \\ 69,66667 \\ 20,33333 \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} 20,66667 \\ 69,66667 \\ 20,33333 \end{pmatrix}$ , а применение

формул (10) дает  $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 20,87542 \\ 70,37037 \\ 20,53872 \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} 20,46205 \\ 68,9769 \\ 20,13201 \end{pmatrix}$ .

Результат применения  $LU$ -разложения показан на рис. 4.

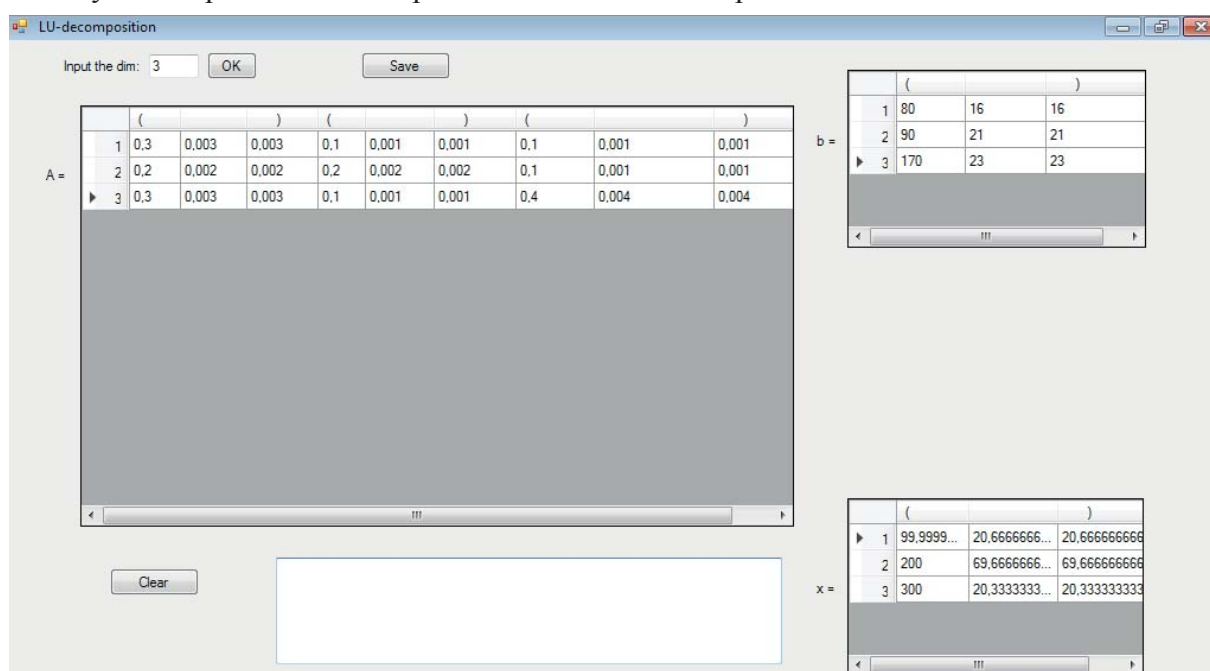


Рис. 4. Результаты расчетов в примере 2.

3. Предельный разброс значений элементов матрицы  $\tilde{A}$  составляет 2 %, а разбросы значений матриц  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{f}$  составляют 10 %, т.е. по сравнению со случаем 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0,006 & 0,002 & 0,002 \\ 0,004 & 0,004 & 0,002 \\ 0,006 & 0,002 & 0,008 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,006 & 0,002 & 0,002 \\ 0,004 & 0,004 & 0,002 \\ 0,006 & 0,002 & 0,008 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим  $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 19,66667 \\ 67,66667 \\ 17,33333 \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} 19,66667 \\ 67,66667 \\ 17,33333 \end{pmatrix}$ , а применение

формул (10) дает  $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 20,06803 \\ 69,04762 \\ 17,68707 \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} 19,28105 \\ 66,33987 \\ 16,99346 \end{pmatrix}$ .

Результат применения  $LU$ -разложения показан на рис. 5.

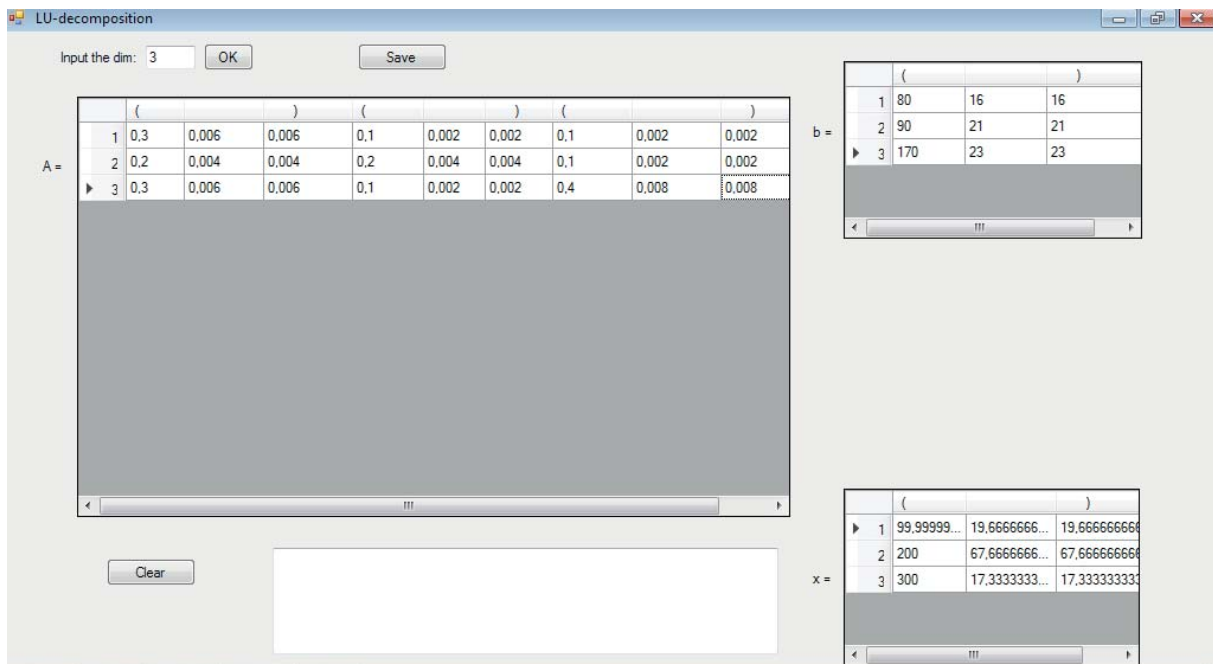


Рис. 5. Результаты расчетов в примере 3.

4. Предельный разброс значений элементов матрицы  $\tilde{A}$  составляет 7 %, а разбросы значений матриц  $\tilde{t}, \tilde{f}$  составляют 10 %, т.е. по сравнению со случаем 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0,021 & 0,007 & 0,007 \\ 0,014 & 0,014 & 0,007 \\ 0,021 & 0,007 & 0,028 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,021 & 0,007 & 0,007 \\ 0,014 & 0,014 & 0,007 \\ 0,021 & 0,007 & 0,028 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим  $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 14,66667 \\ 57,66667 \\ 2,33333 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 14,66667 \\ 57,66667 \\ 2,33333 \end{pmatrix}$ , а применение

формул (10) дает  $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 15,77061 \\ 62,00717 \\ 2,50896 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 13,70717 \\ 53,89408 \\ 2,18069 \end{pmatrix}$ .

Результат применения  $LU$ -разложения показан на рис. 6.

Заметим, что при увеличении разброса элементов матрицы  $\tilde{A}$  до 8 % система не имеет положительных нечетких решений.

5. Предельный разброс значений элементов матрицы  $\tilde{A}$  составляет 10 %, а разбросы значений матриц  $\tilde{t}, \tilde{f}$  заданы соответствующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & 0,01 & 0,04 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & 0,01 & 0,04 \end{pmatrix};$$

$$t = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}, t_g = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}, t_h = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} 104 \\ 132 \\ 166 \end{pmatrix}, f_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}, f_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

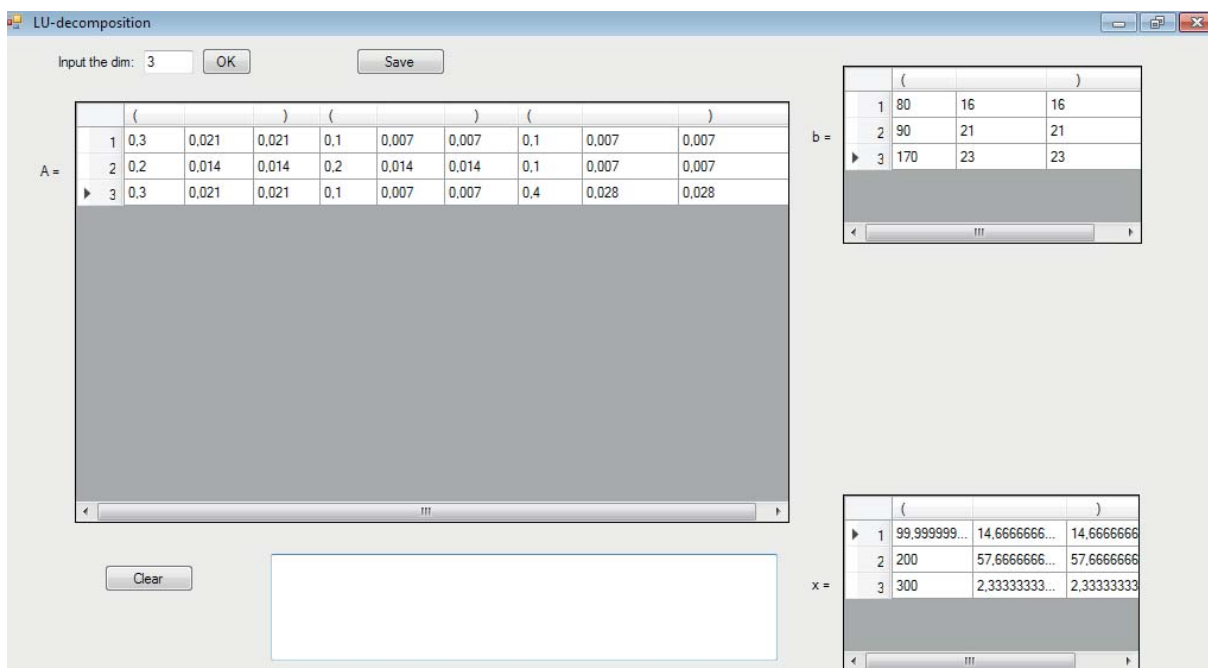


Рис. 6. Результаты расчетов в примере 4.

Так как  $\tilde{b} = \tilde{t} - \tilde{f} = (b, g, h)$ , то по формулам (3) и (5) при  $\lambda = -1$  получаем

$$b = t - f = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 34 \end{pmatrix}, \quad g = t_g + f_g = \begin{pmatrix} 8 \\ 10,5 \\ 11,5 \end{pmatrix}, \quad h = t_h + f_h = \begin{pmatrix} 8 \\ 10,5 \\ 11,5 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим  $x = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} 8,83333 \\ 31,83333 \\ 5,66667 \end{pmatrix}$ ,  $z = \begin{pmatrix} 8,83333 \\ 31,83333 \\ 5,66667 \end{pmatrix}$ .

Результат применения  $LU$ -разложения показан на рис. 7.

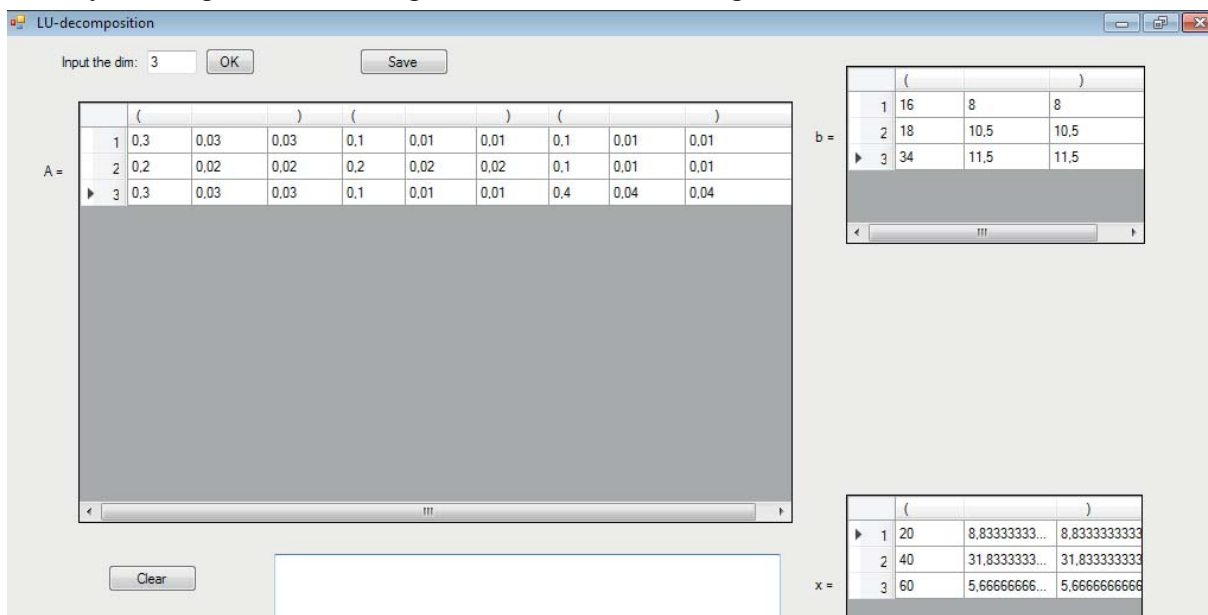


Рис. 7. Результаты расчетов в примере 5.



Применение формул (10) дает

$$x = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 9,81481 \\ 35,37037 \\ 6,29630 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 8,0303 \\ 28,93939 \\ 5,15152 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов демонстрируют, что неопределенности задания элементов матриц коэффициентов прямых затрат, конечного спроса и производственного задания существенно влияют на результат. При малых разбросах значений параметров могут применяться формулы (8), при более значимых разбросах – выведенные в работе формулы (10). Существуют наборы начальных данных, при которых не существует положительное нечеткое решение полностью нечеткой линейной системы уравнений.

## Заключение

Сформирована математическая модель выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат, конечном спросе и производственном задании с помощью аппарата треугольных нечетких чисел и полностью нечетких линейных систем уравнений. Описаны три приближенных метода решения полностью нечеткой линейной системы. Приведены примеры анализа влияния неопределенности задания коэффициентов матрицы прямых затрат, матрицы-столбца конечного спроса, матрицы-столбца производственного задания на изменение объемов выпуска продукции в различных секторах экономики при помощи сформированной полностью нечеткой линейной модели.

### Литература

1. Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. – М.: ИНФРА–М, 2015.
2. Куреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – СПб.: Лань, 2015.
3. Пантелеев А.В., Савельева В.С. Алгоритмическое и программное обеспечение исследования математической модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе // Моделирование и анализ данных. 2019. № 3. С. 11–23.
4. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press, New York, 1980.
5. Matinfar M., Nasseri S.H., Sohrabi M. Solving fuzzy linear system of equations by using Housholder decomposition method // Applied Mathematical Sciences. 2008. V.51. P. 2569–2575.
6. Nasseri S.H., Sohrabi M., Ardil E. Solving fully fuzzy linear systems by use of a certain decomposition of the coefficient matrix // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. V.19. P. 784–786.
7. Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H. Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution // Appl. Math. Inf. Sci. 2014. V. 8, No. 3, P. 1003–1019.
8. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems// Allied Mathematics and Computation. 2006. V. 179. P. 328–343.



## Analysis of the production task model with fuzzy information about direct cost factors and the final product demand

**Panteleev A.V.\***

MAI (National Research University), Moscow, Russia  
avpanteleev@inbox.ru

**Saveleva V.S.\*\***

MAI (National Research University), Moscow, Russia  
verassavel@mail.ru

The article discusses the study of a mathematical model of execution of the production task in the presence of fuzzy information about the matrixes of direct costs and final demand. By solving a problem with fuzzy information we mean the solution of a linear system of equations with a fuzzy matrix and a fuzzy right-hand side described by fuzzy triangular numbers in a form of deviations from the mean. In this task of search of inter-sectoral balance the LU-decomposition method for the matrix of direct cost which is further used for solving the system of linear equations is applied. A software implementation of a numerical method for finding a strong solution of a fuzzy system of linear equations consisting of two successive stages is described. At the first stage, the necessary and sufficient conditions for the existence of a strong solution are verified. At the second stage, the solution of the system is found, which is written in the form of a fuzzy matrix. The influence of the fuzzy numbers parameters on the final result was studied.

**Keywords:** fuzzy logic, triangular numbers, fully fuzzy linear system of equations, strong solution, parametric form of a triangular number.

### References

1. Bortakovskii A.S., Panteleev A.V. Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya. Practicum [Linear algebra and analytic geometry. Practicum]. – Moscow: Publ. INFRA–M, 2015.
2. Kireev V.I., Panteleev A.V. Chislennyye metody v primerah i zadachah [Numerical methods in examples and problems]. – St. Petersburg: Publ. Lan', 2015.

### For citation:

Panteleev A.V., Saveleva V.S. Analysis of the production task model with fuzzy information about direct cost factors and the final product demand. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 32–45. doi: 10.17759/mda.2019090402 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Panteleev Andrei Vladimirovich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical Cybernetics, Faculty of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: avpanteleev@inbox.ru

\*\***Saveleva Vera Sergeevna**, undergraduate student of the Faculty of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: verassavel@mail.ru



3. Panteleev A.V., Saveleva V.S. Algorithmic support and software for analysis of input-output mathematical model with fuzzy information about the final demand. *Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia)*. 2019, no.3, P.11–23.
4. Dubois D., Prade H. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, New York, 1980.
5. Matinfar M., Nasser S.H., Sohrabi M. Solving fuzzy linear system of equations by using Housholder decomposition method // *Applied Mathematical Sciences*. 2008. V.51. P. 2569–2575.
6. Nasser S.H., Sohrabi M., Ardil E. Solving fully fuzzy linear systems by use of a certain decomposition of the coefficient matrix // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2008. V.19. P. 784–786.
7. Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H. Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution // *Appl. Math. Inf. Sci.* 2014. V. 8, No. 3, P. 1003–1019.
8. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems // *Alied Mathematics and Computation*. 2006. V. 179. P. 328–343.

## Исследование модифицированной стратегии последовательного хеджирования с наклонной полосой нечувствительности

**Зубов С.А.\***

МАИ, Москва, Россия  
zubslav@yandex.ru

В настоящей работе рассматривается модификация стратегии последовательного хеджирования опциона, при которой вводится полоса нечувствительности. Верхняя граница данной полосы имеет наклон. В ходе работы была рассмотрена математическая модель с дискретным процессом ценообразования. Приращения данного процесса имеют нормальное распределение с постоянным ненулевым средним и постоянной дисперсией. В статье рассматривается распределение числа пересечений непрямолинейной полосы дискретным гауссовским блужданием. Составлены формулы, которые позволяют задать распределение числа пересечений полосы в направлениях «снизу-вверх» и «сверху-вниз». Был составлен алгоритм подсчета количества этих пересечений и оценки условной вероятности перехода. Помимо этого была рассмотрена зависимость средних потерь хеджера при использовании данной стратегии от коэффициента наклона верхней границы полосы нечувствительности и ширины полосы. С использованием моделирования по методу Монте-Карло был составлен алгоритм поиска оптимальной ширины и наклона полосы. В ходе проведения численных экспериментов была выявлена зависимость и определен оптимальный коэффициент наклона при заданных параметрах. Экспериментальная работа подтвердила корректность предложенных алгоритмов и доказала эффективность данной модификации в сравнении с использованием стратегии с прямолинейной полосой.

**Ключевые слова:** опцион, стратегия последовательного хеджирования, гауссовское блуждание, полоса нечувствительности.

### Для цитаты:

Зубов С.А. Исследование модифицированной стратегии последовательного хеджирования с наклонной полосой нечувствительности // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 46–56. doi: 10.17759/mda.2019090403

\*Зубов Святослав Антонович, студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. E-mail: zubslav@yandex.ru



## Введение

Рынок производных финансовых инструментов является перспективным сегментом ценных бумаг в Российской Федерации. Он привлекает инвесторов возможностью получения прибыли, превосходящей по величине прибыль от операций на рынке акций. Помимо этого, инвестору предоставлен широкий спектр срочных контрактов, которые он может заключить. Это позволяет хеджировать риски при инвестировании в акции, т.е. страховать свои риски.

Одним из типов срочных контрактов является опцион. Он представляет из себя договор между покупателем и продавцом, по которому представляется возможность купить или продать актив по цене, оговоренной на момент заключения сделки в течение определенного промежутка времени. В отличие от форварда, опцион не является обязательным к исполнению, т.е. покупатель может исполнить или не исполнить его по собственному желанию. При заключении договора, продавец берет на себя риск, связанный с возможным изменением цены актива, за что получает денежную премию, именуемую стоимостью опциона. Опционы можно разделить на колл опциона, который дает право на покупку актива по контрактной цене, и пут-опцион, который дает право на продажу по оговоренной цене. По времени исполнения на американский опцион и европейский, т.е. исполнен в течение некоторого промежутка времени или в определенное время, соответственно.

Для того, чтобы минимизировать риски неблагоприятного изменения цены опциона, продавец может использовать часть премии, на формирование инвестиционного портфеля. В него могут входить другие финансовые инструменты. Продавец управляет своим портфелем таким образом, чтобы компенсировать риск опционной позиции. Эта стратегия называется хеджированием, а лицо, управляющее портфелем – хеджером.

Теория страхования срочных позиций начала активно развиваться во второй половине XX века. Одной из фундаментальных работ по теории срочных контрактов является результат работы Ф.Блэка и М.Шоулса [4], полученный в 1973 г. Ими была выведена формула оценки премии европейского колл-опциона и построена модель, которая подразумевает то, что премия опциона может быть произведена в непрерывной перебалансировкой инвестиционного портфеля. На управление таким портфелем хеджер затрачивает в среднем всю премию за опцион.

Данная модель является справедливой при «идеальных» условиях рынка ценных бумаг, при которых не имеется ограничений на короткие продажи, а сделки могут совершаться мгновенно. При этом необходимо, чтобы базовый актив являлся ликвидным, иначе необходимо учитывать неизвестную длительность транзакций, при управлении финансовым портфелем.

Существует несколько стратегий хеджирования опционной позиции. Одной из них является стратегия последовательного хеджирования, которая позволяет хеджеру обезопасить себя от колебаний цены по всем параметрам.

Стратегия последовательного хеджирования состоит в том, что в случае, если цена базового актива становится больше цены поставки, то производится полное покрытие опционной позиции, в ином случае, активы продаются. Это позволяет избежать потерь, связанных с возможным падением цены актива в дальнейшем. Перебалансировка портфеля производится только в случае пересечения ценой базового актива уровня поставки.





Впервые стратегия последовательного хеджирования была рассмотрена в работе Сейнденверга под названием «Stop-loss start-gain strategy» [6]. Дальнейшее развитие эта стратегия получила в работе П.Карра [5], где была доказана несамофинансируемость модели. Так же, была выведена новая формула расчета стоимости европейского колл-опциона на основе данной стратегии.

В России данной проблемой занимался Буренин [1]. Благодаря ему она получила название «стратегия последовательного хеджирования». В статье А.И. Кибзуна и В.А. Губерниева [2] была рассмотрена дискретная мультипликативная модель ценообразования акций базового актива. В их работе была проведена оценка ожидаемых потерь хеджера при использовании стратегии последовательного хеджирования.

При данной стратегии перебалансировка портфеля ценных бумаг производится в случае, если рыночная цена актива достигает цены поставки. Но это приводит к тому, что при высокой частоте колебаний курса относительно цены поставки, хеджер несет неоправданно высокие потери.

Для того чтобы избежать данную проблему, в статье А.И. Кибзуна и В.Р. Соболя [3] была рассмотрена модернизация стратегии последовательного хеджирования. Ими было введено понятие полосы нечувствительности, которая предполагает, что продажа и покупка актива совершается не при пересечении цены поставки, а при пересечении этой полосы, которая включает в себя цену поставки. При пересечении верхней границы полосы «снизу-вверх» опционная позиция будет открытой, в случае пересечения нижней границы «сверху-вниз» – позиция закрыта. В работе была рассчитана оптимальная ширина полосы, при которой потери хеджера минимальны.

В данной статье рассматривается непрямолинейная полоса нечувствительности, при которой нижняя граница является зафиксированной, а верхней задается наклон. В качестве верхней границы полосы используем прямую с отрицательным коэффициентом наклона, что соответствует сужающейся полосе. Это должно обеспечить меньшие затраты на закрытие позиции – уменьшается спред между ценой покупки и продажи, – при приближении срока исполнения опциона и текущей ценой актива, превышающей страйк. Исследуется зависимость средних затрат хеджера от наклона верхней границы полосы нечувствительности и ее ширины.

## Постановка задачи

Рассмотрим модель с дискретным процессом ценообразования. Пусть цена поставки базового актива –  $k$ .  $x_i$  – признак состояния хеджирующего портфеля на  $i$  – ом шаге.  $x_i=0$  соответствует открытой позиции,  $x_i=1$  – закрытой. Время жизни опциона возьмем равным  $N$ . Будем рассматривать одностороннюю полосу, при которой нижний уровень равен цене поставки  $k$ , а верхняя граница полосы задается функцией  $f(q)=k(l+d)+q$ , где  $d$  – некоторое значение, определяющее ширину полосы нечувствительности, а  $q$  – коэффициент наклона верхней границы. Предположим, что все приращения случайны и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией. Этим условиям удовлетворяет случайный процесс:

$$S_i = S_{i-1} + \beta \Delta t + \sigma \xi_i, \quad i=1, n, \quad (1)$$

где  $S_i \sim N(i\beta \Delta t, i\sigma)$  – цена актива на  $i$ -ом шаге, имеющая нормальное распределение  $S_0$  – начальная цена актива,  $\beta$  – коэффициент линейного сноса,  $\sigma$  – волатильность.



## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ

От количества пересечений полосы нечувствительности на протяжении всего срока исполнения опциона, при использовании стратегии последовательного хеджирования, зависят затраты хеджера.

Вычислим количество пересечений полосы на  $i$ -ом шаге траекторией цены базового актива. Для этого воспользуемся формулой:

$$c_i = c_{i-1} + |x_i - x_{i-1}|, \quad (2)$$

где  $c_i$  – количество пересечений полосы на предыдущем шаге.

Как говорилось ранее,  $x_i$  - признак состояния хеджирующего портфеля. В случае, если позиция закрыта  $x_i = 1$ , а в случае открытой позиции принимает значение  $x_i = 0$ . Когда происходит пересечение полосы, меняет свое значение на противоположное предыдущему  $x_{i-1}$  таким образом:

$$|x_i - x_{i-1}| = \begin{cases} 1, & \text{при } x_i \neq x_{i-1} \\ 0, & \text{при } x_i = x_{i-1} \end{cases} \quad (3)$$

При этом  $x_i$ , будем определять по формуле :

$$x_i = I\{S_i + \sigma\xi_i \geq (k(1+d) + q) - \beta\Delta t\}(1 - x_{i-1}) + I\{S_{i-1} + \sigma\xi_i < k - \beta\Delta t\}x_{i-1} \quad (4)$$

Для подсчета количества пересечений, в среде Matlab, был реализован следующий алгоритм :

Алгоритм 1

1. Сгенерируем приращения для каждого шага от 1 до  $T$  с помощью  $S1 = \text{normrnd}(0, \text{sigma}, N, 1)$
2. Найдем значение цены актива на заданном шаге  $S_i = S_{i-1} + \beta\Delta t + \sigma\xi_i$ .
3. Если  $S_i > k(1+d) + q$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 0$ ,  $x_{i-1} = 0$  и  $C_i = C_{i-1} + 1$ , после чего перейти к шагу 7.
4. Если  $S_i < k(1+d) + q$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 0$ , а  $x_{i-1} = 0$  и перейти к шагу 7.
5. Если  $S_i < k$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 1$ , а  $x_{i-1} = 0$   $C_i = C_{i-1} + 1$ , после чего перейти к шагу 7.
6. Если  $S_i > k$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 1$ , а  $x_{i-1} = 1$  и перейти к шагу 7.
7. Если  $i > N$  то перейти к шагу 8, иначе положить  $i = i + 1$ , занести значение  $C_i$  в массив и перейти к шагу 2.
8. Построить траекторию изменения цены актива, завершит работу алгоритма. (см. стр. 5)

Результат работы алгоритма при  $q = -0,001$ ,  $N = 350$ ,  $\sigma = 0,2$  (рис 1. см. стр. 5).

В результате было получено количество пересечений  $C = 8$ .

## Средние затраты хеджера

При использовании стратегии последовательного хеджирования хеджер может нести убытки. В случае, если цена базового актива пересекает верхнюю полосу «снизу вверх», то хеджер приобретает базовый актив в полном объеме. В случае, когда цена пересекает цену поставки «сверху вниз» хеджер продает все активы. Введем величину  $l_i$ ,

которая определяет потери хеджера на  $i$ -ом шаге:

$$l_i = \begin{cases} S_i, & \text{если } S_{i-1} \leq k(1+d) + q < S_i, \\ -S_i, & \text{если } S_i \leq k < S_{i-1}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Тогда средние затраты хеджера на  $i$ -ом шаге определяются как:

$$E[l_i] = S_i (P\{x_i = 1 | x_{i-1} = 0\} - P\{x_i = 0 | x_{i-1} = 1\}) \quad (6)$$

Для того чтобы подсчитать средние потери хеджера на всем промежутке до  $n$ -го шага, введем величину  $L_n = \sum_{i=1}^n l_i$ , тогда средние затраты хеджера за время жизни опциона:

$$E[L_n] = \sum_{i=1}^n E[l_i] \quad (7)$$

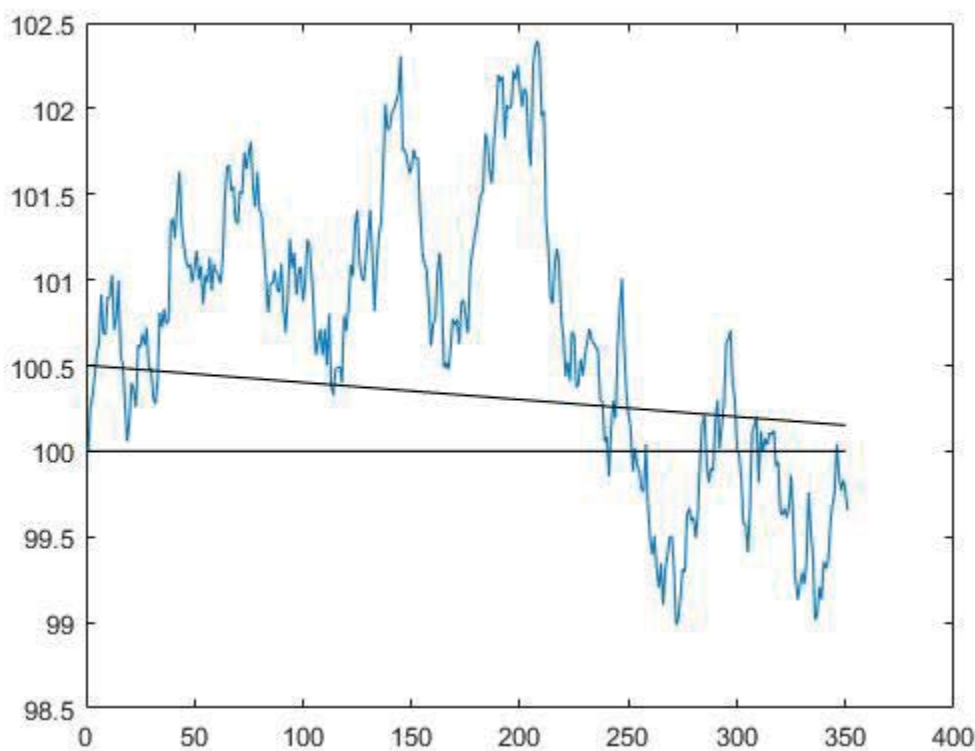


Рис. 1. Результат работы алгоритма 1.

## Вероятность последовательности состояний

Для того, чтобы посчитать вероятность цепочки событий, а именно вероятность последовательности состояний хеджирующего портфеля, введём случайную величину  $\zeta_k$ , определяемую как:

$$\eta_k \triangleq \sum_{i=1}^k \zeta_i, \quad (8)$$

тогда вектор  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i)$  является случайной многомерной величиной, с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей, заданной следующим образом:



$$\text{cov}(\bar{\eta}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 & 2\sigma^2 & \dots & 2\sigma^2 \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 & 3\sigma^2 & \dots & 3\sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2 & 2\sigma^2 & 3\sigma^2 & \dots & n\sigma^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Введем величину, определяющую последовательность состояний опциона. При подсчете вероятности события, будем рассматривать 2 величины – позицию опциона в данный момент времени и предшествующее ему  $x_{i-1}$ . Процесс изменения состояний  $x$  - немарковский, т.к. события являются зависимым, следовательно, для подсчета вероятности последовательности состояний опциона необходимо считать вероятность последовательности состояний до  $i$ -го шага по формуле:

$$P\{x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_i = a_i\} \quad (10)$$

Для того чтобы вычислить вероятность события  $x_i = a_i$ , воспользуемся интегралом многомерной плотности. Для этого определим границы интегрирования для пары состояний  $x_i$  и  $x_{i-1}$ :

$$x_{i-1} = 0, x_i = 0: \eta_1 \leq \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - \beta}{\sigma}, \dots, \eta_{i-1} \leq \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - (i-1)\beta}{\sigma},$$

$$\eta_i \leq \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - i\beta}{\sigma}, \dots \text{ при } i = \overline{1, N} \quad (11)$$

$$x_{i-1} = 0, x_i = 0: \eta_1 > \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - \beta}{\sigma}, \dots, \eta_{i-1} > \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - (i-1)\beta}{\sigma},$$

$$\eta_i \leq \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - i\beta}{\sigma}, \dots \text{ при } i = \overline{1, N} \quad (12)$$

$$x_{i-1} = 0, x_i = 0: \eta_1 \leq \frac{k - S_0 - \beta}{\sigma}, \dots, \eta_{i-1} \leq \frac{k - S_0 - (i-1)\beta}{\sigma},$$

$$\eta_i \leq \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - i\beta}{\sigma}, \dots \text{ при } i = \overline{1, N} \quad (13)$$

$$x_{i-1} = 0, x_i = 0: \eta_1 \leq \frac{k - S_0 - \beta}{\sigma}, \dots, \eta_{i-1} \leq \frac{k - S_0 - (i-1)\beta}{\sigma},$$

$$\eta_i \leq \frac{(k(1+d)+q) - S_0 - i\beta}{\sigma}, \dots \text{ при } i = \overline{1, N} \quad (14)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда дана последовательность состояний:  $x_1 = 0, x_2 = 1$ . Предположим, что в начальный момент времени позиция была открытой, тогда вероятность данной цепочки равна:

$$P\{x_1 = 0, x_2 = 1\} = P\{S_1 \leq k(1+d) + q, S_2 > (k(1+d) + q) =$$

$$= P\left\{ \xi_1 \leq \frac{k(1+d) + q - S_0 - \beta}{\sigma}, \xi_2 > \frac{k(1+d) + q - S_0 - \beta}{\sigma} \right\} \quad (15)$$



## Вероятность перехода на заданном шаге

Определим вероятность изменения состояния опциона. Для этого необходимо взять сумму всех возможных последовательностей состояний опциона.

Примем состояние опциона на шаге  $i$ -ом шаге равным  $x_i = a_i$ , а  $x_{i-1} = a_{i-1}$ . Тогда формула примет следующий вид:

$$P\{x_i = a_i | x_{i-1} = a_{i-1}\} = \sum_{i=1}^n P\{x_1 = a_{1j}, \dots, x_{i-2} = a_{(i-2)j}, x_{i-1} = a_{i-1}, x_i = a_i\} \quad (16)$$

Для оценки условной вероятности перехода в заданное состояние был составлен алгоритм, основанный на методе Монте-Карло. Данный метод основан на проведении большого числа реализаций случайного процесса. Таким образом можно получить оценку случайной величины. Точность данного метода напрямую зависит от качества генератора случайных чисел. Для нахождения приближенного значения оцениваемой величины необходимо провести достаточно большое количество опытов  $n$ .

Сформулируем алгоритм оценки условной вероятности перехода:

Алгоритм 2:

1. Сгенерируем приращения для каждого шага от 1 до  $T$  с помощью  $S1 = normrnd(0, sigma, N, 1)$ .
2. Создадим массив  $S\_array$ .
3. Найдите значения цены  $S_i = S_{i-1} + \beta\Delta t + \sigma\xi_i$ , на данном шаге.
4. Занесем в массив  $S\_array$  значение цены актива.
5. Если  $S_i > k(1+d) + q$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 0$ ,  $x_{i-1} = 1$  и  $C_i = C_{i-1} + 1$ , положить  $C_{01} = C_{01} + 1$  и перейти к шагу 9.
6. Если  $S_i < k(1+d) + q$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 0$ , а  $x_{i-1} = 0$ , положить  $C_{00} = C_{00} + 1$  и перейти к шагу 9.
7. Если  $S_i < k$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 1$ , а  $x_{i-1} = 0$   $C_i = C_{i-1} + 1$ , положить  $C_{10} = C_{10} + 1$  и перейти к шагу 9.
8. Если  $S_i > k$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 1$ , а  $x_{i-1} = 1$ , положить  $C_{11} = C_{11} + 1$  и перейти к шагу 9.
9. Если  $i > N$  то перейти к шагу 9, иначе положить  $i = i + 1$ , и перейти к шагу 3.
10. Если  $j = M$  - перейти к шагу 10, иначе положить  $j = j + 1$  и перейти к шагу 2.
11. Определить условные вероятности перехода из одного состояния в другое по формуле  $P[x_i | x_{i-1}] = \frac{C}{M}$  для каждого значения  $C$ . Завершить работу алгоритма.

## Алгоритм поиска оптимальной ширины и коэффициента наклона полосы

Как говорилось ранее, средние потери хеджера зависят от количества пересечений полосы нечувствительности. Таким образом, изменяя ширину полосы и коэффициент наклона, можно определить их значения таким образом, что потери хеджера будут минимальны. Сформулируем алгоритм поиска оптимального соотношения параметра  $d$  и  $q$ .

Алгоритм 3:

1. Сгенерируем приращения для каждого шага от 1 до  $T$  с помощью  $S1 = normrnd(0, sigma, N, M)$ .
2. Зададим шаг изменения коэффициентов  $d$  и  $q$ . Пусть  $a$ -шаг коэффициента  $d$ , а  $a_i$  - шаг коэффициента  $q$ .



3. Зададим процесс изменения цены  $S_i = S_{i-1} + \beta\Delta t + \sigma\xi_i$ .
4. Если  $S_i > k(1+d)+q$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 0$ ,  $x_{i-1} = 1$  и  $l = l + S$  перейти к шагу 8.
5. Если  $S_i < k(1+d)+q$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 0$ , а  $x_{i-1} = 0$ , перейти к шагу 8.
6. Если  $S_i < k$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 1$ , а  $x_{i-1} = 0$  и положить  $l = l - S$  и перейти к шагу 8.
7. Если  $S_i > k$  и предыдущая позиция опциона была открытой, то  $x_i = 1$ , а  $x_{i-1} = 1$  и перейти к шагу 8.
8. Если  $i > N$ , то вычислить  $l2 = l / N$  и перейти к шагу 9, иначе положить  $i = i + 1$ ,  $d = d + a$  и перейти к шагу 4.
9. Если  $j = M$ , то вычислить  $L2 = l2 / N$  и перейти к шагу 10, иначе положить  $j = j + 1$  и перейти к шагу 3.
10. Если  $q1 = t$  -положить  $q = q + a_1$ , перейти к шагу 4
11. Найти индекс минимального элемента массива  $larray$ , сопоставить его с элементом массива  $darray$  и  $qarray$ , построить график. Алгоритм закончен.

## Результаты численных экспериментов

Воспользуемся полученным алгоритмом. Зададим начальные параметры:

Пусть начальная цена базового актива  $S = 100$  у.е., цену поставки актива возьмем равным  $k = 100$  у.е. Количество шагов  $N$  примем равным 10,  $\sigma = 0,2$ .

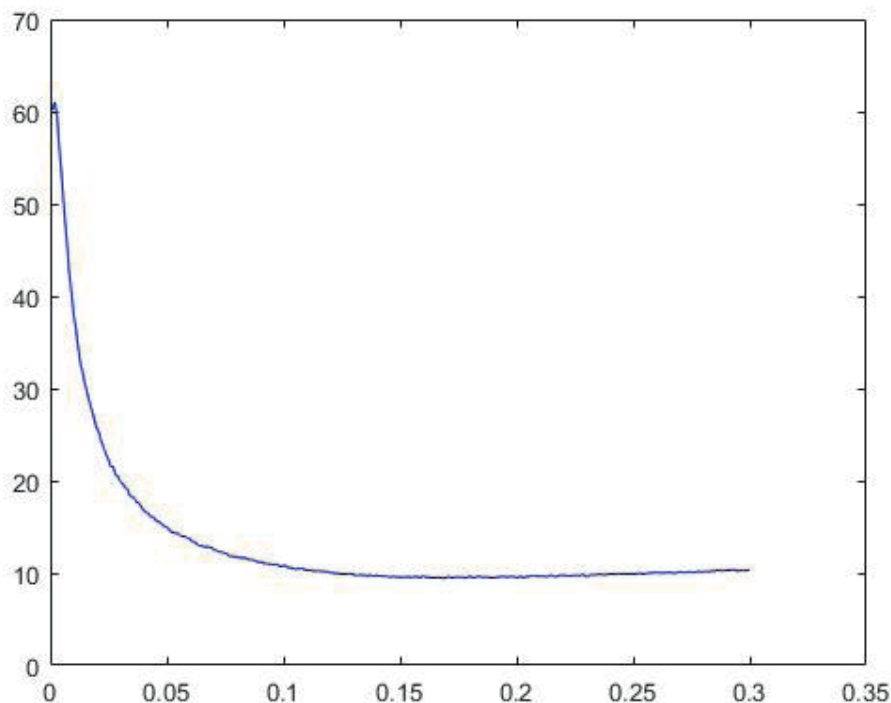


Рис. 2. Результат работы алгоритма 2.

В ходе работы алгоритма было получено, что минимальные потери, при заданных параметрах, хеджер несет при ширине полосы  $d = 0,18$  и коэффициенте наклона  $q = 0,0005$ .



На основании полученных результатов можно утверждать, что данный метод, в сравнении с модификацией стратегии последовательного хеджирования, при которой вводится полоса нечувствительности с зафиксированной верхней границей, позволяет уменьшить потери хеджера.

Результаты доказывают, что хеджер не понесет убытков с ненулевой вероятностью.

#### *Литература*

1. Буренин А.Н. “Рынки производных финансовых инструментов“ М.:Инфра-М, 1996
2. Губерниев В.А., Кибзун А.И. Последовательное хеджирование опционной позиции: анализ и модернизация // Автоматика и телемеханика.- 1999.-№ 1.-С. 113–125
3. Кибзун А.И., Соболев В.Р., “Двухшаговая задача хеджирования европейского колл-опциона при случайной длительности транзакций“// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С.164–174
4. Кибзун А.И., Соболев В.Р., “Модификация стратегии последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера.»// УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ Материалы XI всероссийской школы-конференции молодых ученых. 2014. С. 580–591
5. Black F., Scholes M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities“ // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. № 3. P. 637–659
6. Carr P., Jarrow R. “The Stop-Loss Start-Gain Paradox and Option Valuation: a New Decomposition into Intrinsic and Time Value“ // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. № 3 P.469–492.
7. Seidenverg E. “A Case of Confused Identity“ // Financial Analysts Journal. 1988. P. 63–67



## The stop-loss start-gain strategy modification with tilt deadband research

**Zubov S.A.\***

MAI (National Research University), Moscow, Russia  
zubslav@yandex.ru

In this article The stop-loss start-gain strategy modification with tilt deadband is studied. The top line of this band is tilted. During the research mathematical model with discrete pricing process was examined. The increments of this process have a normal distribution with a constant nonzero mean and constant dispersion.

The article considers the distribution of the number of intersections of a non-rectilinear strip by a discrete Gaussian walk. Formulas that allow to specify the distribution of the number of intersections of the strip in the directions “bottom-up” and “top-down” were deduced. An algorithm was developed to calculate the number of these intersections and evaluate the conditional probability of the transition. In addition, the dependence of the average hedger losses while using this strategy on the slope coefficient of the upper boundary of the dead band and the band width was considered. Using the Monte Carlo simulation, an algorithm was developed to find the optimal width and slope of the strip. During the numerical experiments, the dependence was revealed and the optimal slope coefficient was determined for the given parameters.

Experimental work confirmed the correctness of the proposed algorithms and proved the effectiveness of this modification in comparison with the use of a strategy with a straight strip.

**Keywords:** option, stop-loss start-gain strategy, Gaussian walk, deadband.

### References

1. Black F., Scholes M. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” // Journal of Political Economy. 1973. Vol. 81. № 3. P. 637–659.
2. Burenin A.N. “Rynki proizvodnyh finansovyh instrumentov” M.:Infra-M, 1996
3. Carr P., Jarrow R. “The Stop-Loss Start-Gain Paradox and Option Valuation: a New Decomposition into Intrinsic and Time Value” // Review of Financial Studies. 1990. V. 3. № 3 P.469–492.
4. Guberniev V.A., Kibzun A.I. Posledovatel’noe hedzhirovanie opcionnoj pozicii: analiz i modernizaciya // Avtomatika i telemekhanika.- 1999.– № 1. – S. 113–125.
5. Kibzun A.I., Sobol V.R., “MODIFICATION OF STOP-LOSS START GAIN STRATEGY. DISTRIBUTION OF HEDGER’S LOSSES” UPRAVLENIE BOL’SHEMI SISTEMAMI Materialy XI vserossijskoj shkoly-konferencii molodyh uchenyh. 2014. C. 580–591.

### For citation:

Zubov S.A. The stop-loss start-gain strategy modification with tilt deadband research. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 46–56. doi: 10.17759/mda.2019090403 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Zubov Svyatoslav Antonovich**, Student. Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, E-mail: zubslav@yandex.ru





6. Kibzun A.I., Sobol V.R., “A two-step problem of hedging a European call option under a random duration of transactions“//Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN. 2015. T. 21, № 3. S.164–174.
7. Seidenverg E. “A Case of Confused Identity“ // Financial Analysts Journal. 1988. P. 63-67.

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **АНАЛИЗ ДАННЫХ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 004.942, 331.101.5

## **Задачи анализа и прогнозирования деятельности ИТ компании с использованием методов машинного обучения**

***Алексейчук А.С.\****

МАИ, Москва, Россия  
alexeychuk@gmail.com

***Виноградов В.И.\*\****

МАИ, Москва, Россия  
vvinogradov@inbox.ru

***Данякин К.Д.\*\*\****

МАИ, Москва, Россия,  
kirill.danyakin@yandex.ru

В статье рассмотрены задачи применения методов машинного обучения, используемые для повышения эффективности бизнес-процессов работы с клиентами в ИТ-компаниях. Рассмотрено применение двух моделей машинного обучения: кластеризация клиентской базы и прогнозирование выручки.

**Ключевые слова:** машинное обучение, ИТ компания, сегментирование клиентской базы, прогнозирование.

**Для цитаты:**

*Алексейчук А.С., Виноградов В.И., Данякин К.Д.* Задачи анализа и прогнозирования деятельности ИТ компании с использованием методов машинного обучения // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 57–66. doi: 10.17759/mda.2019090404

**\*Алексейчук Андрей Сергеевич**, к.ф.-м.н., старший преподаватель каф. «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), E-mail: alexeychuk@gmail.com

**\*\*Виноградов Владимир Иванович**, к.ф.-м.н., доцент каф. «Математическая кибернетика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), E-mail: vvinogradov@inbox.ru

**\*\*\*Данякин Кирилл Дмитриевич**, студент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), E-mail: kirill.danyakin@yandex.ru



## Введение

В данной статье описаны некоторые задачи анализа деятельности ИТ-компании методами машинного обучения для решения прикладных задач анализа данных по клиентам и продуктам, необходимых для повышения эффективности бизнес-процессов в ИТ-компании при работе с клиентами при продвижении программных продуктов и сервисов. Компания занимается разработкой и распространением электронных сервисов. В процессе ее работы был накоплен массив данных о работе компании со своими клиентами. Поэтому возникла возможность проведения анализа имеющихся данных методами машинного обучения для повышения эффективности работы компании на рынке.

В статье рассмотрены два примера использования методов машинного обучения – кластеризация клиентской базы и прогнозирование выручки от одной из групп распространяемых продуктов.

## Методы и среда реализации

Для решения задач анализа данных в ИТ-компании используются следующие исходные данные и программные средства:

- база данных CRM на базе СУБД PostgreSQL и фреймворка Ruby on Rails, содержащая данные о 30 тыс. покупок различных программных продуктов и web-сервисов клиентами компании;
- интерпретатор Python 3.7;
- среда разработки и тестирования Jupyter Notebook;
- набор библиотек для анализа данных на Python: библиотека алгоритмов машинного обучения Scikit-Learn, библиотека численных вычислений Numpy, библиотека алгоритмов манипулирования многомерными данными Pandas, библиотека визуализации данных Matplotlib,
- RapidMiner Studio вер.7.3 – программная среда для изучения данных и машинного обучения.

## Сегментация клиентской базы

Целью решения задачи сегментации клиентской базы является оптимизация работы с клиентами за счет выявления групп клиентов со схожими признаками и адресной работой с целевой аудиторией каждого сегмента (кластера). Клиенты, относящиеся к одному и тому же кластеру, имеют достаточно много общих признаков, что может позволить использовать для них общие методы клиентского обслуживания. Для каждого кластера могут быть назначены ответственные менеджеры, обученные специфике работы с клиентами, входящими в данный кластер. Экономический эффект достигается за счёт снижения затрат на работу с клиентами и за счёт улучшения показателя допродаж, поскольку структурирование клиентской базы позволяет вести работу с целевой аудиторией каждого сегмента.

Кластер – это объединение нескольких однородных элементов, которое может рассматриваться как самостоятельная единица, обладающая определёнными свойствами. Если данные понимать как точки в пространстве атрибутов, то задача кластерного анализа формулируется как выделение «сгущений» точек и разбиение совокупности имеющихся элементов на заданное число кластеров. Кластеризация – это пример обучения



без учителя, поскольку у входных данных отсутствуют метки, позволяющие построить модель кластеризации и экстраполировать ее на новые данные [1].

В качестве исходных данных для задачи сегментации клиентской базы используются записи базы данных системы CRM, используемой IT-компанией для организации работы с клиентами. В качестве атрибутов пространства признаков используется около 50 параметров, важнейшими среди которых являются:

- Сумма выручки за последний год по продуктам, разрабатываемым самой IT-компанией;
- Сумма выручки за последний год по продуктам, разрабатываемым компаниями-партнерами;
- Данные из бухгалтерского баланса клиента, такие как годовая выручка, прибыль или убытки компании-клиента, и данные из других открытых источников, например, место регистрации, количество сотрудников;
- Сведения о компании от его клиентского менеджера, такие как наличие и количество подразделений, сведения о характере деятельности клиента – например, организация на ОСНО, кредитная, бюджетная, страховая, иностранное представительство и др.

Для решения задачи кластеризации используются библиотеки `scikit-learn` для обработки набора данных и `matplotlib` для визуализации. Решению задачи кластеризации предшествует этап понижения размерности исходных данных при помощи метода главных компонент [2]. Это преобразование позволяет избавиться от сильно коррелирующих атрибутов, расположив оси координат пространства признаков вдоль направлений разброса точек исходной выборки с максимальной дисперсией.

Для осуществления кластеризации опробован ряд методов кластерного анализа: метод *k*-средних, DBSCAN, иерархическая кластеризация, BIRCH, affinity propagation [3]. Наилучший и относительно легко интерпретируемый результат показал метод *k*-средних. Этот метод состоит в разделении массива данных на заранее заданное количество кластеров *k* при помощи минимизации суммы квадратов расстояний от каждого элемента  $x_j$  до центроида  $\mu_i$  кластера, в котором он находится:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{x_j \in S} \|x_j - \mu_i\|^2 \rightarrow \min.$$

В качестве расстояния между элементами выборки используется метрика Евклида в пространстве признаков.

Фрагмент кода программы, осуществляющего кластеризацию, приведен на рис.1.

```
1 from sklearn.cluster import KMeans
2 kmeans = KMeans(n_clusters = 7, max_iter = 600)
3 kmeans.fit(data)
4 data['Cluster'] = kmeans.predict(data)
```

Рис. 1. Применение метода *KMeans* для кластеризации.

Переменная *data* содержит массив исходных данных в объекте класса *DataFrame* из библиотеки *Pandas*. *DataFrame* представляет собой двумерную таблицу, в которую помещаются данные различных типов после их выборки из базы данных. Метод *KMeans* осуществляет поиск заданного количества кластеров в массиве данных, после чего к таблице *data* добавляется столбец *Cluster*, содержащий метку кластера для каждого элемента выборки.



На рисунке 2 изображены условные границы полученных кластеров в системе координат, где по оси  $x$  отложена сумма покупок по продуктам, разрабатываемым самой ИТ-компанией, а по оси  $y$  – сумма покупок по продуктам партнеров. Кластеры 1 и 2 соответствуют клиентам с небольшой суммой покупок, кластер 6 – крупным клиентам, 5 – клиентам, которые покупают только продукты партнеров, 7 – клиентам, покупающим в основном продукты, разрабатываемые самой ИТ-компанией на крупные суммы, 3 и 4 – клиентам, занимающим промежуточное положение.

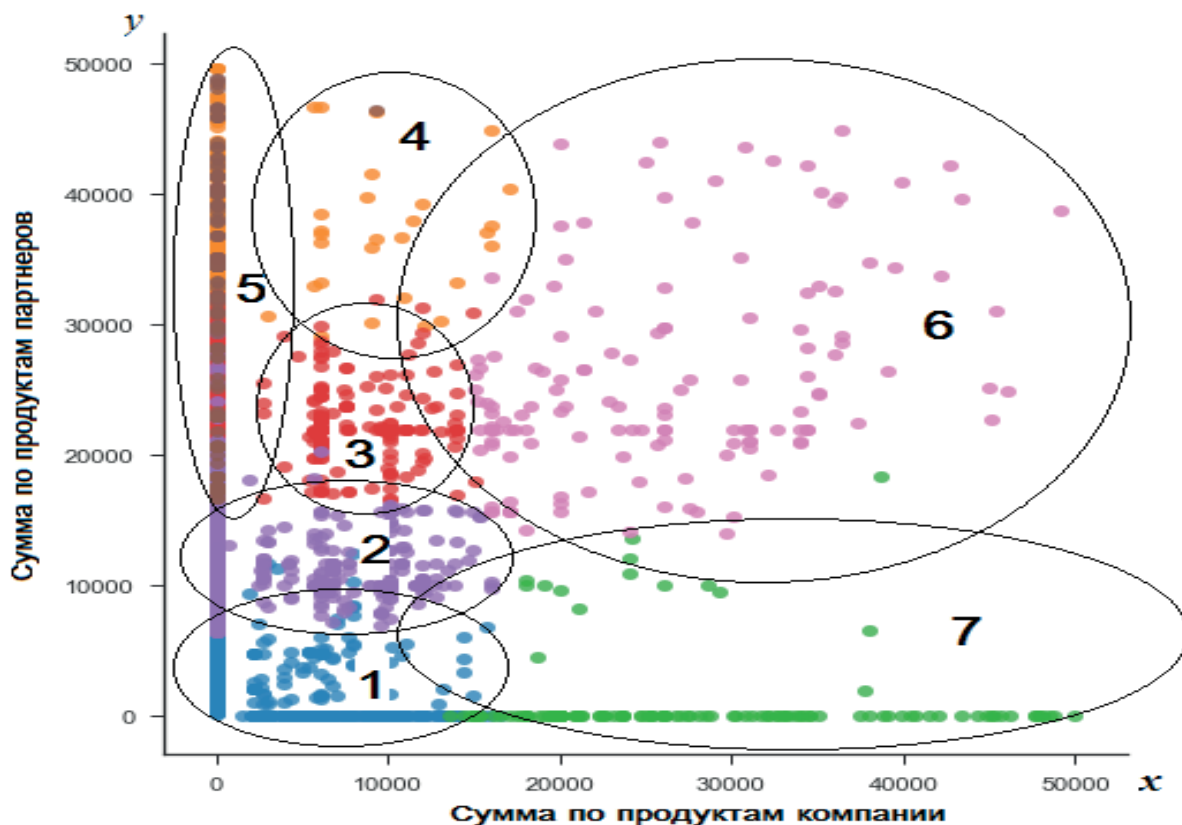


Рис. 2. Сегменты клиентской базы.

Выбор оптимального количества кластеров и оценка адекватности полученной модели могут быть произведены при помощи специальных критериев качества кластеризации (метрик), учитывающих плотность размещения элементов внутри кластеров в пространстве признаков и расстояние между соседними кластерами [4]. Метрики в той или иной мере отражают неформальные требования к результату процесса кластеризации, состоящие в том, что внутри кластеров объекты должны быть тесно связаны между собой, а объекты разных кластеров должны быть далеки друг от друга.

В данной работе используется метрика «silhouette» («силуэт»), определяемая следующим образом [5]. Пусть  $a_{pj} = \frac{1}{n_{c_p} - 1} \sum_{x_k \in c_p} \|x_j - x_k\|$  – среднее расстояние от  $x_j \in c_p$  до других объектов из кластера  $c_p$ ;  $d_{qj} = \frac{1}{n_{c_q}} \sum_{x_k \in c_q} \|x_j - x_k\|$  – среднее расстояние от  $x_j$  до объектов из другого кластера  $c_q$ ,  $q \neq p$ . Положим  $b_{pj} = \min_{q \neq p} d_{qj}$ . Тогда «силуэт» эле-



мента с определяется как  $S_{x_j} = \frac{b_{pj} - a_{pj}}{\max(a_{pj}, b_{pj})}$ , и оценка общего качества кластеризации

вычисляется как среднее значение «силуэта» для всех  $N$  элементов выборки:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_{x_j}.$$

Оптимальное количество кластеров соответствует достижению максимума значения метрики. Поскольку в методе k-means используется случайная инициализация кластеров, то при поиске оптимального количества кластеров используется усредненное значение метрики «силуэт» для 10 запусков алгоритма k-means для каждого варианта.

Поиск оптимального количества кластеров в массиве данных происходит следующим образом (рис. 3).

```
1 from sklearn import metrics
2 for i in range(3, 11):
3     silhouette_score = 0
4     for j in range(0, 10):
5         kmeans = KMeans(n_clusters = i, max_iter = 600)
6         kmeans.fit(data)
7         data['Cluster'] = kmeans.predict(data)
8         silhouette_score += metrics.silhouette_score(data, data['Cluster'], metric = 'euclidean')
9     silhouette_score /= 10

For 3 clusters, silhouette metric is 0.5343945542162297
For 4 clusters, silhouette metric is 0.5280479127353657
For 5 clusters, silhouette metric is 0.5344349213547583
For 6 clusters, silhouette metric is 0.5374041696365525
For 7 clusters, silhouette metric is 0.5440603420263154
For 8 clusters, silhouette metric is 0.5184025109925108
For 9 clusters, silhouette metric is 0.5131951863447509
```

Рис. 3. Определение количества кластеров.

На примере видно, что для данной выборки максимум значения метрики достигается при 7 кластерах. Однако значения метрики для другого количества кластеров отличаются не сильно, что говорит о размытости границ кластеров и подверженности их изменениям.

## Прогнозирование выручки от распространения электронных сервисов

Рассматриваются данные о выручке IT-компании по определенной группе продуктов по месяцам за несколько лет. Эти данные представлены таблицей, содержащей два столбца: первый столбец содержит информацию о месяце и годе, а второй – сумму выручки за соответствующий месяц.

Сформулируем задачу прогнозирования: на основе имеющихся данных построить и применить модель долгосрочного прогнозирования (больше одного года) для получения информации о потенциальной выручке в будущих периодах.

Для решения поставленной задачи необходимо, как и в любой задаче анализа данных, сначала подготовить данные, например, заменив средним или исключив элементы с пустым значением выручки.

Следующий этап состоит в том, чтобы определиться с моделью обучения. В рассматриваемой задаче используется модель Хольта-Винтерса, которая применяет метод тройного экспоненциального сглаживания в задаче прогнозирования временных рядов. В данной модели имеются три параметра для сглаживания уровня, тренда и сезонности.



Далее необходимо оптимизировать параметры модели. Сделать это можно перебирая возможные комбинации параметров с целью минимизации функции потерь. За функцию потерь была взята среднеквадратическая ошибка между предсказанным значением и истинным. Оптимизация происходит при помощи оценивания функции потерь при рассматриваемых параметрах на кросс-валидации. Стандартный процесс кросс-валидации для временных рядов не применим, так как при случайном перемешивании значений теряется временная структура ряда. Поэтому была использована кросс-валидация на скользящем окне (sliding window validation). Ее принцип состоит в следующем: происходит обучение модели на небольшом отрезке ряда от его начала до некоторого значения  $t$ , затем строится прогноз на  $t+n$  шагов вперед и рассчитывается ошибка, после чего выборка расширяется до значения  $t+n$  и производится прогноз от  $t+n$  до  $t+2\cdot n$ . Таким образом осуществляется движение тестового отрезка до последнего доступного наблюдения.

После оптимизации параметры, при которых наблюдался минимум функции потерь (среднеквадратической ошибки), можно подставить в модель Хольта-Винтерса, получив таким образом модель прогнозирования. Решение задачи проводилось в среде RapidMiner, в которой для решения задачи прогнозирования была построена следующая диаграмма процесса прогнозирования. На диаграмме отображены этапы процесса, включающие, предобработку данных, оптимизации параметров модели прогнозирования, построение модели прогнозирования, ее применение и отображение результатов.

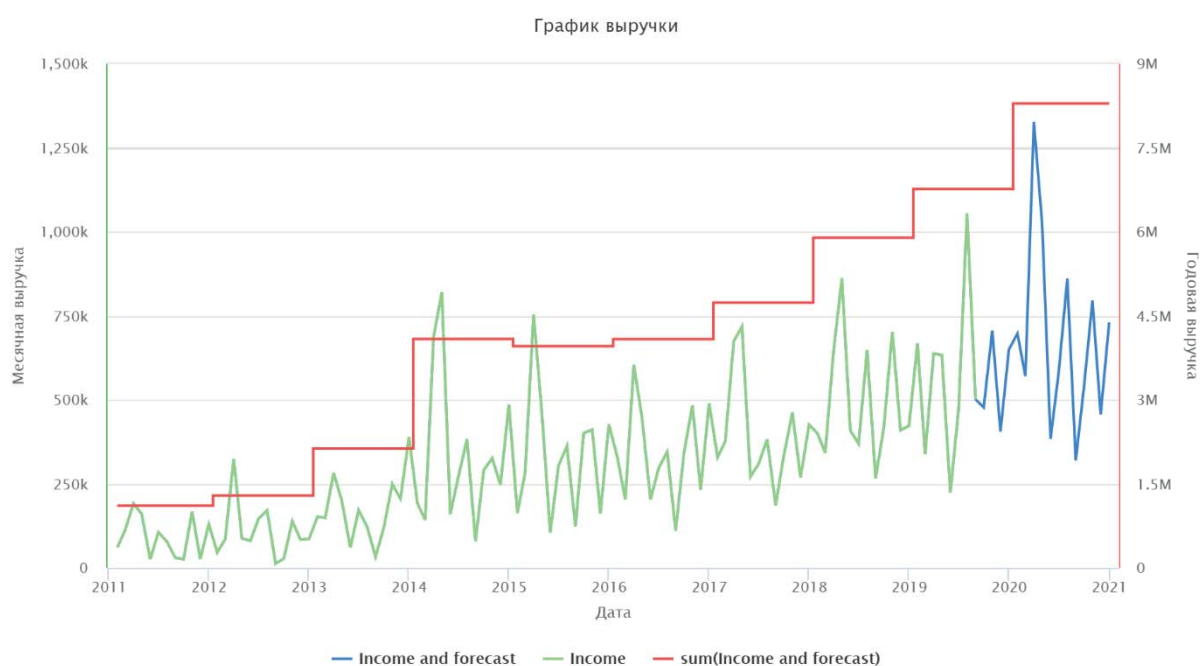


Рис. 4. Диаграмма процесса прогнозирования в среде Rapidminer

Построенная модель позволяет получить предсказание ежемесячной и годовой выручки на промежуток времени, включающий следующий полный календарный год. На рис. 5 отображены график и прогноз ежемесячной (income и income and forecast) и годовой (sum) выручки.

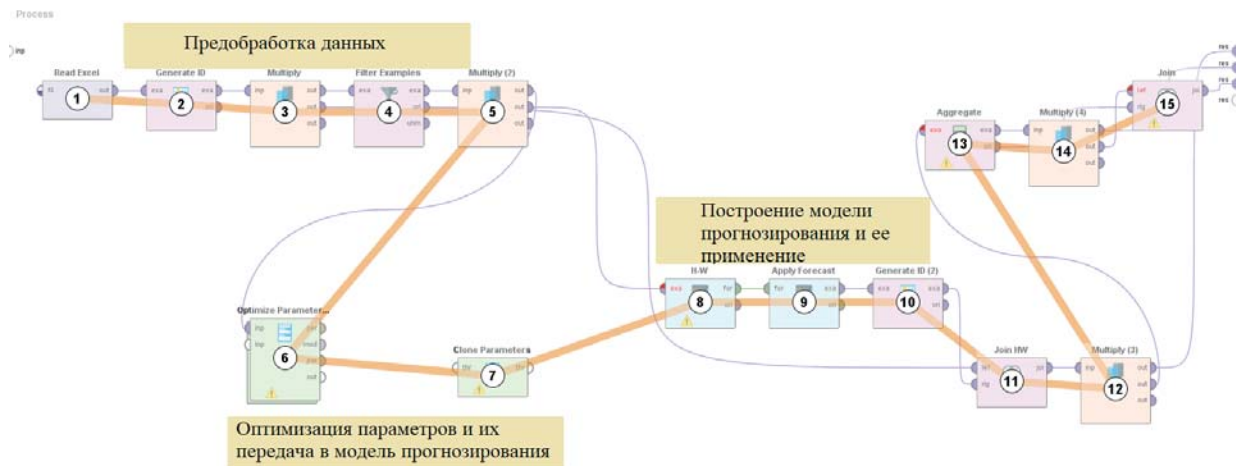


Рис. 5. График и прогноз выручки

Построенный прогноз говорит о квартальной периодичности величины выручки и устойчивом ее росте за последние 3 года и ожидаемом прогнозе сохранения такой динамики в следующем году. Построенная модель может ежемесячно пополняться сведениями о полученной выручке и осуществлять прогнозирование на следующие периоды, что позволит контролировать успешность процесса продвижения электронных сервисов в IT-компании.

## Заключение

В статье показан пример использования методов машинного обучения для повышения эффективности деятельности IT-компании, приведены примеры программного кода на языке Python и диаграммы процесса анализа в среде RapidMiner, а также результаты расчетов. В результате применения алгоритмов машинного обучения в IT-компании выявлены закономерности в структуре базы клиентов и в структуре их покупательской корзины, которые могут быть понятны для интерпретации их маркетологами компании на практике. На основе алгоритмов машинного обучения разработаны программные модули, позволяющие в дальнейшем использовать их для повышения эффективности деятельности.

Реализация алгоритмов Data Mining встроена в CRM, что позволяет использовать их маркетологами и клиентскими менеджерами в их повседневной работе. В процессе деятельности компании информация о клиентах и их покупках регулярно обновляется, поэтому периодически производится перерасчет обновленных данных по приведенным алгоритмам. Это позволяет поддерживать актуальность структуры сегментов клиентов и наборов ассоциативных правил.

### Благодарности

Авторы благодарят за предоставленные данные генерального директора компании «ОВИОНТ ИНФОРМ» Артамонова Г.Ф.

### Литература

1. Dubes R.C., Jain A.K. Algorithms for Clustering Data. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988.
2. Shlens J. A tutorial on principal component analysis. Institute for Nonlinear Science, UCSD, 2005.





3. *Rui Xu, Wunsch D.* Survey of clustering algorithms. IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 16, no. 3, 2005. pp. 645–678.
4. *Wang L., Leckie C., Ramamohanarao K., Bezdek J.* Automatically Determining the Number of Clusters in Unlabeled Data Sets. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, vol. 21, 2009. p. 335–350.
5. *Rousseeuw Peter J.* Silhouettes: a Graphical Aid to the Interpretation and Validation of Cluster Analysis. Computational and Applied Mathematics, vol. 20, 1987. p. 53–65.
6. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003.



# The tasks of analysis and forecasting the activities of IT companies using Machine Learning methods

***Aleksaychuk A.S.*** \*

MAI, Moscow, Russia  
alexejchuk@gmail.com

***Vinogradov V.I.*** \*\*

MAI, Moscow, Russia  
vvinogradov@inbox.ru

***Danyakin K.D.*** \*\*\*

MAI, Moscow, Russia  
kirill.danyakin@yandex.ru

The article describes applying machine learning methods for improving the efficiency of business processes when working with clients in an IT company. Two models of machine learning are considered: clustering the customer base and revenue forecasting.

**Keywords:** Machine Learning, IT Company, customer base segmentation, forecasting.

## Acknowledgements

The authors are grateful to G.F. Artamonov, General Director of OVIONT INFORM, for the data provided.

## References

1. Dubes R.C., Jain A.K. Algorithms for Clustering Data. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1988.
2. Shlens J. A tutorial on principal component analysis. Institute for Nonlinear Science, UCSD, 2005.
3. Rui Xu, Wunsch D. Survey of clustering algorithms. IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 16, no. 3, 2005. pp. 645–678.

## For citation:

Aleksaychuk A.S., Vinogradov V.I., Danyakin K.D. The tasks of analysis and forecasting the activities of IT companies using Machine Learning methods. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 57–66. doi: 10.17759/mda.2019090404 (In Russ., abstr. in Engl.)

\****Aleksaychuk Andrej Sergeevich***, Ph.D., Senior Lecturer, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: alexejchuk@gmail.com

\*\****Vinogradov Vladimir Ivanovich***, Ph.D., Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: vvinogradov@inbox.ru

\*\*\****Danyakin Kirill Dmitrievich***, Student, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: kirill.danyakin@yandex.ru



4. Wang L., Leckie C., Ramamohanarao K., Bezdek J. Automatically Determining the Number of Clusters in Unlabeled Data Sets. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, vol. 21, 2009. p. 335–350.
5. Rousseeuw Peter J. Silhouettes: a Graphical Aid to the Interpretation and Validation of Cluster Analysis. *Computational and Applied Mathematics*, vol. 20, 1987. p. 53–65.
6. Lukashin Yu.P. *Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennyh ryadov.* [Adaptive methods of short-term forecasting of time series.] – М.: Finansy i statistika, 2003. (In Russ., Abstr. in Engl.)

## Определение тональности сообщений СМИ методом их концептуального анализа

**Хорошилов Ал-др А. \***

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия  
khorosilov@mail.ru

**Козловская Я.Д. \*\***

МАИ, Москва, Россия  
yana04029877@mail.ru

**Мусабаев Р.Р. \*\*\***

ИИВТ, Алматы, Казахстан  
rmusab@gmail.com

**Красовицкий А.М. \*\*\*\***

ИИВТ, Алматы, Казахстан  
akrassovitskiy@gmail.com

**Хорошилов Ал-ей А. \*\*\*\*\***

«27 ЦНИИ» Минобороны России, Москва, Россия  
alex\_khor@mail.ru

В статье изложено решение задачи создания лингвистического инструментария и методики автоматического определения тональности новостных сообщений, связанных с качеством жизни рядового гражданина республики Казахстан.

### Для цитаты:

*Хорошилов Ал-др А., Козловская Я.Д., Мусабаев Р.Р., Красовицкий А.М., Хорошилов Ал-ей. А. Определение тональности сообщений СМИ методом их концептуального анализа. // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 67–79. doi: 10.17759/mda.2019090405*

**\*Хорошилов Александр Алексеевич**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), профессор кафедры Московского авиационного института (МАИ), Москва. E-mail: khorosilov@mail.ru

**\*\*Козловская Яна Дмитриевна**, студент Московского авиационного института (национальный исследовательский университет), Россия. E-mail: yana04029877@mail.ru

**\*\*\*Мусабаев Рустам Рафикович**, руководитель лаборатории Института информационных и вычислительных технологий, Казахстан. E-mail: rmusab@gmail.com

**\*\*\*Красовицкий Александр Михайлович**, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Института информационных и вычислительных технологий, Казахстан. E-mail: akrassovitskiy@gmail.com

**\*\*\*\*\*Хорошилов Алексей Алексеевич**, к.т.н., старший научный сотрудник 27-го Центрального научно-исследовательского института Министерства обороны России. E-mail: alex\_khor@mail.ru



Был определен подход для решения задачи, разработано программное обеспечение и методы автоматизированного создания словарей объектов и словарей оценочных предикатов, а также словарей модификаторов меры оценки. Проведенный эксперимент подтвердил правильность предложенной методики оценки событий, освещенных в новостных сообщениях и работоспособность программного комплекса.

Эта методика, при соответствующей выборке объектов оценки событий, может быть использована при создании тональных портретов конкретных авторов по совокупности их публикаций, а также тональных портретов различных новостных агрегатов по совокупности освещаемых ими событий в конкретный временной интервал.

**Ключевые слова:** концептуальный анализ, предикатно-актантная структура, тональность текстов, тональный словарь, модификаторы тональности, автоматическое установление оценки тональности текстов.

## Введение

На психоэмоциональной настрой современного общества значительное влияние оказывают электронные средства массовой информации (ЭСМИ). Эти средства информируют общество о событиях, происходящих в мире. Но, как правило, большинство событий освещается с разных точек зрения и в значительной части случаев цель такого освещения событий является желание автора публикации сформировать у читателя определенной мнение, созвучное мнению автора. Но самом деле ЭСМИ в ряде случаев навязывают такое мнение читателям, которое заказывается авторам идеологических публикаций. Как правило, чтобы сформировать у читателя определенное мнение по идеологическим вопросам читателю преподносится заранее препарированная информация – подаются определенные события в позитивном или негативном плане, или некоторые события или вообще не происходили (так называемые фейковые события), или являлись постановочными событиями. Такое освещение событий формирует определенный психоэмоциональный настрой у определенной части общества. Сейчас все такие манипуляции с ЭСМИ называют элементами информационной войны. Для борьбы с такими манипуляциями необходимо выработать автоматизированные средства противодействия, базирующиеся на методах искусственного интеллекта.

Одним из наиболее действенных способов противодействия этим манипуляциям был разработан в США в начале Второй мировой войны, когда Германия объявила войну США. В то время в США были сильны профашистские настроения и функционировало большое число газет, пропагандирующих эти настроения. Поскольку США являлось демократическим правовым государством, то необходимы были формальные основания для закрытия по судебному решению этих профашистских газет. Таким основанием могли бы быть количественные данные по фактам позитивного отношения к фашистской идеологии и одновременно негативного – к устоям демократического общества. Для решения этой задачи были привлечены лингвисты, которые проанализировали большое число газетных публикаций и установили критерии, в соответствии можно было бы формально отнести газеты к профашистским. При этом была предложена относительная простая методика, заключающаяся в выборе списка значимых фамилий и терминов, относящихся как к фашистской идеологии, так и к демократическим ценностям, с целью определения тональности контента всех случаев упоминания этих терминов и фамилий. Впоследствии такой метод определения тональности текстов назвали контент-анализом.



## **Обзор методов определения тональности текстов**

При решении проблемы автоматического установления тональности текстов можно выделить несколько основных подходов, изложенных в работах [1–5]:

Подходы, базирующиеся на методах машинного обучения и векторном сравнении исходных текстов с размеченными эталонными коллекциями, предполагают предварительное обучение машинного классификатора путем раскладывания каждого документа в виде вектора признаков. При этом каждому документу указывается его тип тональности. При реализации этих методов требуются значительные первоначальные трудозатраты при разметке текстов, необходимые для обучения алгоритмов обучения. Эти методы достаточно эффективны при анализе однородных текстов слабо подверженным изменениям тематики и их эмотивного настроения.

Подходы, базирующиеся на выявлении в текстах эмотивной лексики на основе использования тональных словарей. В рамках этого метода часто используются списки паттернов, подставляемых в регулярные выражения, а также правила формирования шаблонов для объединения слов в цепочки. Обычно в качестве шаблонов использовались два типа синтаксических конструкций: «прилагательное + существительное» и «наречие + глагол». При этом тональность текста рассчитывалась как среднее эмоциональных оценок. Оценка для каждой конструкции определяется путем установления совместной встречаемости их со словами тонального словаря.

С нашей точки зрения наиболее перспективными и универсальными подходами к решению задачи установления тональности текстов являются подходы, ориентированные на глубокий семантический анализ текстов. В рамках этого подхода возможно обеспечить детальный анализ тональности в пределах каждого предложения и в отношении каждого объекта. Так, например, в работе [1] производилась определения тональности у объектов на основе предикационных отношений в пропозиции. Тональность устанавливалась на основе классификационных тональных словарей.

В работе [5] ставилась задача разработки методов оценки деятельности органов власти на основе набора показателей видов их деятельности и процедурных средств лингвистического анализа текстов. Преимущество таких методов заключается в том, что они обеспечивают получение более объективных количественных показателей и освобождают результаты оценки от субъективного экспертного представления о действительной ситуации.

## **Постановка задачи исследований**

Исходя из конкретных задач НИР<sup>1</sup> в рамках нашего исследования была поставлена задача разработки лингвистического инструментария и методики автоматического определения тональности новостных сообщений, связанных с качеством жизни<sup>2</sup> рядового гражданина. Как известно, информация, относящаяся к повышению или понижению качества жизни, в значительной степени определяют его эмоциональное отношение к властным структурам. При этом мы исходили из того, что на эмоциональный настрой пользовате-

<sup>1</sup> Работа проводится в рамках ПЦФ BR05236839 «Разработка информационных технологий и систем для стимулирования устойчивого развития личности как одна из основ развития цифрового Казахстана».

<sup>2</sup> Совокупность свойств и характеристик жизни человека, относящихся к их способности удовлетворять его существующие и предполагаемые потребности [ГОСТ Р 22.10.01–2001].



лей ЭСМИ влияет сознательный подбор освещаемых событий и их эмоциональная окраска. Для решения этой задачи необходимо исследовать содержательную и эмоциональную составляющие текстов, составить оценочные словари и разработать программные средства их формализации и выявления в текстах.

Для установления количественных характеристик тональности текстов воспользуемся формулой подсчета значения веса тональности текстов, приведенной в работе [2], но для нормирования числа предложений в документе берем не их абсолютное значение, а логарифм значения:

$$W_k = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} W_i}{\log(N)}, \quad (1)$$

где

$W_k$  – значение веса тональности  $k$ -ого документа;

$W_i$  – значение веса тональности  $i$ -ой ситуации;

$N$  – общее число предложений в документе.

Для формирования тонального портрета подмножества документов все тексты  $T_i$  помещаются в одномерное эмотивное пространство в соответствии со своим весом  $W_{T_i}$ , причем тексты положительной тональности должны занимать в этом пространстве местоположение справа, отрицательной тональности – местоположение слева. Тексты нейтральной тональности должны располагаться в центре этого пространства. Среднее значение текстов положительной или отрицательной тональности может быть вычислено по формуле:

$$AW_t^c = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} W_{T_i}}{N_c}, \quad T_i \in C, \quad (2)$$

где,

$AW_t^c$  – средний вес текстов, относящихся к классу тональности  $C$ ;

$N_c$  – число текстов относящихся к классу тональности  $C$ ;

После вычисления средних значений текстов положительной или негативной тональности необходимо установить для них границу  $D$  – как середину отрезка  $[AW_t^- ; AW_t^+]$ . На этом отрезке текст  $T$  в соответствии со его знаком и значение его веса располагаются справа или слева от границы  $D$ . При этом, как уже было отмечено, все тексты справа от границы  $D$  относятся к положительному классу, а слева – к отрицательному.

## Теоретические предпосылки решения задачи

Общеизвестно, что смысловое содержание текстов или их фрагментов выражается через систему единиц смысла и их отношений. Наиболее устойчивыми единицами смысла являются понятия (отдельные слова и устойчивые фразеологические и терминологические словосочетания). Второй по значимости единицей смысла является предложение. Основной чертой предложений является их предикативность – то есть свойство утверждения наличия у объектов определенных признаков и их отношений. В основе смысловой структуры предложений лежит его предикатно-актантная структура, компонентами которой являются понятия-предикаты (признаки и отношения) и понятия-актанты, выступающие в роли описываемых объектов.

Для установления психоэмоционального настроения текстов необходимо определить объекты, в отношении которых производится оценка и те компоненты смысловой структуры, которые определяют такую оценку. В качестве объектов обычно выступают суще-



ствительные, в качестве определителей оценки – глаголы. Для усиления или уменьшения эмоциональной оценки используются прилагательные и наречия. Для более точной оценки тональности текстов были предложены три категории объектов. В качестве таких объектов первой категории фигурируют, все те объекты, явления и ситуации, которые в наибольшей степени влияют на качество жизни гражданина. В качестве предикатов – те процессы, которые улучшают или ухудшают это качество. Примерами таких объектов и их оценок могут служить доступность и стоимость предметов первой необходимости (продуктов питания, медикаментов, одежды и др.), качество здравоохранения, социальной защиты, ЖКХ и борьба с правонарушениями. В качестве объектов второй категории – все те ситуации, которые очень важны для общества в целом, но в меньшей степени влияют на качество жизни конкретного гражданина. К таким явлениям можно отнести борьбу с коррупцией, борьбу с терроризмом, правоохранительную, судебную и налоговую систему. И, наконец, к третьей категории можно отнести все те явления, которые определяют престиж страны в целом. Это международная деятельность, культура, спорт, торговля, отношения с другими странами и др.

### **Методика и технологии создание декларативных средств**

При разработке методов оценки текстов необходимо разработать эталонные оценочные словари и методику их применения при анализе текстов. В рамках наших исследований мы пытались решить эту проблему путем автоматизации процесса формирования ситуативных оценочных словарей. Как следует из работ [2] для определения ситуаций и их тональной оценки требуется создать комплекс словарей, состоящий из объектов и связанных с ними предикатов, а также их определителей – наречий (для глаголов) и прилагательных (для существительных), выступающих в роли модификаторов их меры тональности. Обычно решение этой задачи возлагалось на экспертное сообщество. При таком решении затрачивались значительные человеческие ресурсы и длительное время на их создание. Автоматизация этого процесса позволит сократить трудозатраты и время на создание таких словарей.

Основная идея метода автоматизированного составления тональных словарей заключается в том, чтобы на основе уже имеющихся словарных ресурсов обеспечить возможность автоматического выявления в текстах объектов оценки. К таким словарным ресурсами можно отнести различные перечни объектов и текстов, в которых они встречаются. Процесс выявления объектов первой необходимости можно начать, например, с ассортимента потребительской корзины<sup>3</sup>. Этот ассортимент товаров и услуг необходимо выявить в текстах путем их лингвистического анализа и установить в текстах их смысловую связь с лексическими конструкциями, осуществляющими оценку объектов. В предложении такими конструкциями являются глаголы (предикаты). Эксперту должен для каждой такой пары «объект-предикат» зафиксировать оценочный глагол и назначить этой паре индекс тональности (позитив/негатив). Категория тональности для этих объектов будет устанавливаться автоматически. Далее, на основе установленных предикатов, можно будет опре-

<sup>3</sup> «Необходимые для сохранения здоровья человека и обеспечения его жизнедеятельности минимальный набор продуктов питания, а также непродовольственные товары и услуги, стоимость которых определяется в соотношении со стоимостью минимального набора продуктов питания» [Потребительская корзина 2013–2018 год. Информационный портал РФ].





делить в коллекции текстов все возможные объекты, встречающиеся совместно с ними. Эксперту должен только установить индекс их тональности. Объекты других категорий, относящиеся к отраслевым видам деятельности, можно будет установить по различным отраслевым документам: глоссариям, тезаурусам, онтологиям, нормативно-справочным документам и др. Здесь также задача эксперта для каждой выявленной пары «объект-предикат» установить индекс тональности. Категория будет устанавливаться автоматически в соответствии с установленной категории для данной отрасли.

Модификаторы степени тональности: наречия (для глаголов) и прилагательные (для существительных) устанавливаются на основе результатов семантико-синтаксического анализа. Задача экспертов также сводится к установлению степени тональности (слабая/средняя/сильная).

После того как выполнен первоначальный этап установления объектов, предикатов и модификаторов, относящихся к оценке тональности объектов первой категории, можно будет перейти к реализации второго этапа, целью которого будет выявление объектов второй и третьей категории и их оценочных конструкций. Этот этап по своим задачам гораздо сложнее, поскольку необходимо определить виды деятельности в отраслях и установить наборы их оценочных показателей. Поэтому этот этап разработки должен базироваться в большей степени на технологиях глубинного семантического анализа текстов, позволяющего автоматически выявить в отраслевых текстах компоненты их предикатно-актантной структуры и автоматически назначить им набор тональных признаков. В табл.1 приводятся фрагменты комплекса оценочных тональных словарей.

Таблица 1

Категория	Компоненты предикатно-актантной структуры	Классификационный индекс	Прямая/Обратная совместимость	Количественная характеристика
<b>Основные объекты (виды деятельности в отраслях)</b>				
1	хлебобулочные изделия	N00001.001	D	1.0
1	вино-водочная продукция	N00001.001	D	1.0
1	куриные яйца	N00001.001	D	1.0
2	налог на имущество	N00254.001	D	0.6
2	подходящий налог	N00254.001	D	0.6
3	футбольная команда	N03675.001	D	0.3
<b>Оценочные предикаты (предикативные конструкции)</b>				
0	подешеветь	V00042.001	D	1.0
0	подорожать	V000044.001	N	1.0
0	увеличился	V000048.001	N	1.0
0	понижился	V000049.001	D	1.0
0	выиграть	V000021.001	D	1.0
0	проиграть	V000520.001	D	1.0
<b>Модификаторы тональности – прилагательные</b>				
0	незначительный	A000052.001	D	0.8
0	весомый	A000021.001	D	1
<b>Модификаторы тональности – наречия</b>				
0	очень	Y000042.001	D	1.2
0	незначительно	Y000037.001	D	0.8



В табл. 3 для каждого словарного объекта приводится индекс его категории, классификационный индекс, индекс прямой или обратной совместимости и весовой коэффициент. Классификационный индекс объекта соответствует его родовому индексу в тематической онтологии, а индекс прямой совместимости сочетания «объекта- предикат» соответствует основной тональности предиката, или обратный индекс – изменяет эту тональность на противоположную.

В табл. 2 приведены количественные характеристики словарей текущей версии словарного комплекса.

Таблица 2

n/n	Наименование словаря	Объем словаря
Словарь объектов (видов деятельности в отраслях)		
1	Словарь «Продуктовая корзина»	897
2	Словарь по ЖКХ	3427
3	Словарь по спорту	2588
4	Налоговый словарь	2764
5	Словарь по международной деятельности	3536
6	Словарь оценочных предикатов	1736
7	Словари модификаторов тональности: прилагательных	237
8	наречий	147
	<b>Общее количество словарных статей</b>	<b>15332</b>

## Технология автоматического установления тональности текстов

Технология автоматического установления тональности текстов базируется на процедурах их семантико-синтаксического анализа, в результате работы которой смысловое содержание текстов формализуется и структурируется, и выявляются компоненты предикатно-актантной структуры. Эти формализованные компоненты последовательно сопоставляются с комплексом тональных словарей: вначале сопоставляются наименования объектов, после этого, в случае их успешного поиска в словарях объектов, производится сопоставление выявленных в тексте предикатов с элементами словаря оценочных предикатов. При успешном сопоставлении и при наличии в текстах предполагаемых модификаторов меры тональности (наречий и прилагательных) также производится их поиск в соответствующих словарях. Далее после получения всей необходимой информации о событии вычисляется его количественная характеристика по следующей формуле:

Технологию автоматического установления тональности текстов можно представить в виде следующей последовательности лингвистических процедур обработки текста:

1. Выполнение формально-логического контроля текста.
2. Членение на отдельные слова (по пробелам и разделительным знакам между ними).
3. Выполнение морфологического анализа слов.
4. Выполнение членения текста на предложения.
5. Выполнение семантико-синтаксического анализа предложений.
6. Выполнение концептуального анализа предложений и выявление в них компонентов предикатно-актантной структуры.



7. Приведение компонентов предикатно-актантной структуры к их формализованному представлению.
8. Сопоставление компонент предикатно-актантной структуры с элементами комплекса тональных оценочных словарей.
9. Вычисление количественных характеристик тональности событий.
10. Формирование статистического отчета о тональности текста.

## Программные средства определения тональности текстов

При реализации программно-технологического комплекса определения тональности текстов мы базировались на процедурах программно-лингвистической платформе MetaFraz [6], в рамках которой выполнялась формализация смыслового содержания текстов и выявлялась его формализованная предикатно-актантная структура. Методы и технологии машинной грамматики и семантико-синтаксического анализа достаточно подробно описаны в работах [7,8]. Разработанный в рамках данного исследования программный модуль осуществлял разбор на отдельные компоненты предикатно-актантную структуру предложений и производил сопоставление по определенной схеме этих компонент с тональными оценочными словарями. Аналогично сопоставлялись с соответствующими словарями модификаторами меры тональности – наречия и прилагательные. Программно-технологическая схема подсистемы автоматического определения тональности текстов приведена на рис.1. (см. стр. 9)

## Методика оценки тональности текстов

Методика оценки тональности текстов должна в какой-то степени моделировать восприятие человеком смыслового содержания новостных сообщения и их эмоциональной окраски. Обычно он воспринимает всю сумму событий, содержащихся в этих сообщениях, и формирует свое собственное мнение об этих событиях. Это мнение во многом зависит, от того насколько эти события влияют или могут повлиять на его качество жизни и в гораздо меньшей степени на его мнения может повлиять мнение автора публикации. Поэтому мы согласились с авторами статьи [2] утверждавших, что лучшие результаты были получены на основе суммы эмоциональных оценок отдельных сообщений, а не на их частоту употребления, как обычно это применяется в методах машинного обучения.

Количественное значение тональной оценки  $i$ -ого события вычислялось по формуле:

$$S_i = C_i \cdot K_{oi} \cdot K_{mi} \cdot K_{ni},$$

где

$S_i$  — значение тональной оценки  $i$ -ого события;

$C_i$  —  $i$ -ое событие;

$K_{oi}$  — коэффициент категории  $i$ -ого объекта события (диапазон значений коэффициента [-1, -0.6, -0.3, +0.3, +0.6, ±1]);

$K_{mi}$  — коэффициент  $i$ -ого модификатора оценочного предиката (диапазон значений коэффициента [0.1, 1.2]);

$K_{ni}$  — коэффициент  $i$ -ого модификатора объекта события (диапазон значений коэффициента [0.1, 1.2]).

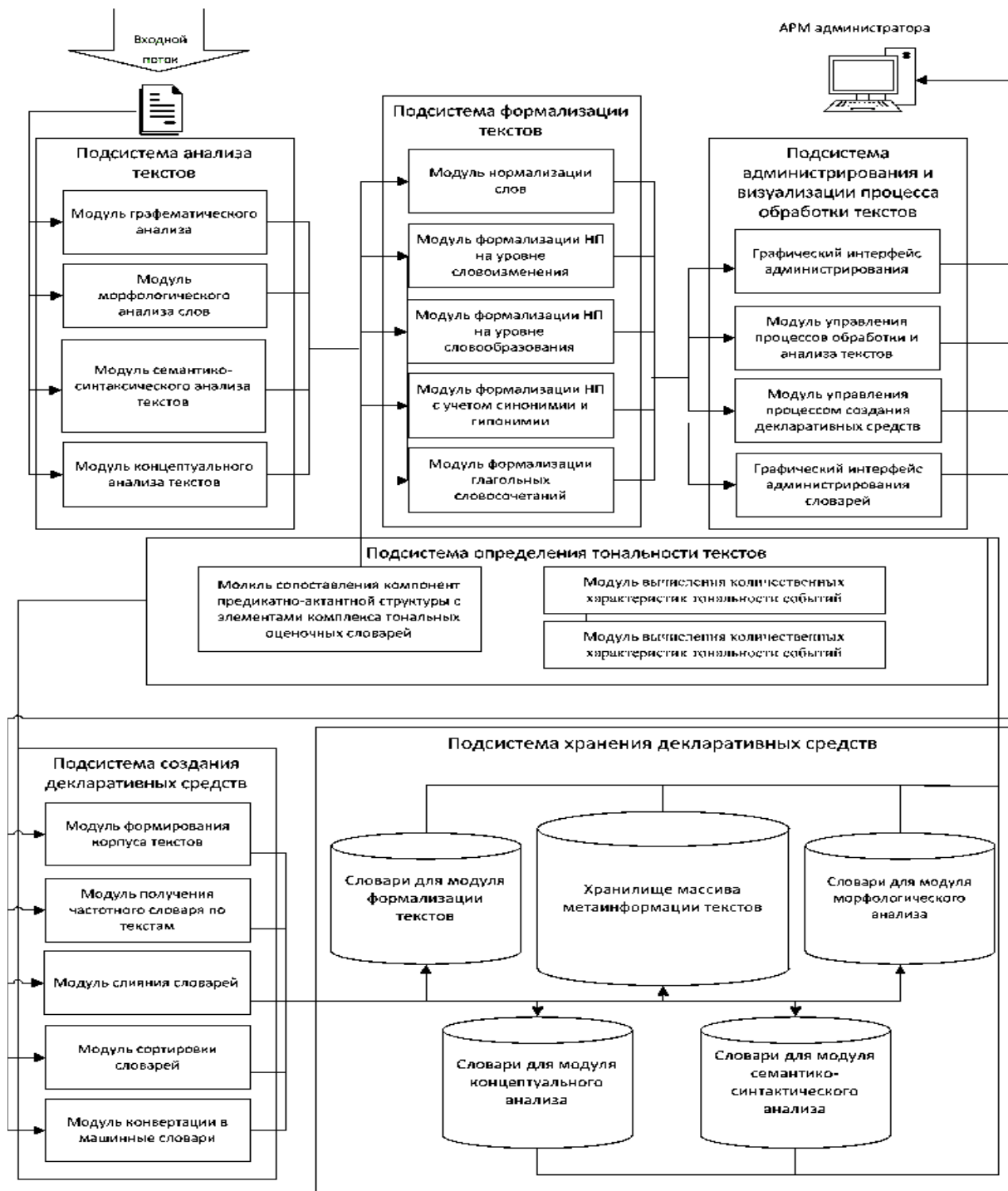


Рис.1. Программно-технологическая схема подсистемы автоматического определения тональности текстов.

## Эксперимент по автоматическому установлению тональности текстов

Задача эксперимента заключалась в проверке работоспособности предложенных технологических решений и проведения экспертной оценки результатов автоматического установления оценки тональности текстов. Для каждого документа выявлялись все ана-



лизируемые ситуации и вычислялась для каждой ситуации его тональная оценка, далее вычислялась абсолютная и средняя тональная оценка документа ( $W$ ). В табл. 3 приведены результаты автоматической оценки тональности документов, влияющих на качество жизни рядового гражданина.

Таблица 3

	Название документа и значение его тональной оценки (Т)	Позитивная оценка			Негативная оценка		
		3-я категория	2-ая категория	1-ая категория	1-ая категория	2-ая категория	3-я категория
1	Какие продукты подорожали в Казахстане ( $W=-1.49$ )			12	14		
2	Хорошее образование не может быть дешевым ( $W=1.34$ )		4			1	
3	Для большинства казахстанцев девальвация – это благо ( $W=0.91$ )		2	1			
4	Великая Победа – напоминание всем тем, кто вынашивает планы против нас ( $W=0.60$ )		3			1	
5	Проблемы образования касаются каждого ( $W=0.83$ )		3				
6	Хорошее образование не может быть дешевым ( $W=1.49$ )		4				
7	Чем обернется «дедолларизация» в СНГ, предложенная Владимиром Путиным ( $W=0.32$ )		3			2	
8	Празднование 550-летия Казанского ханства должно поднять наш регион на новый уровень ( $W=1.52$ )	6	1				

### Перспективы развития метода концептуального анализа текстов

Перспективы развития метода концептуального анализа текстов, ориентированного на автоматическое установление тональности событий, освещаемых в текстах, может развиваться по нескольким направлениям:

1. Совершенствованиям алгоритмов семантико-синтаксического и концептуального анализа текстов связано с повышением точности лексического анализа, разрешением неоднозначной синтаксических и семантических ситуаций и широким применением словарей синтаксических конструкций и системы правил их трансформаций [8].
2. Разработка методов выявления объектов анализа и их оценки должна базироваться на масштабных моделях предметных областей, представленных в виде низшего и среднего уровня тематических онтологии и включающих основной понятийный состав предметных областей и систему смысловых отношений между наименованиями понятий этих предметных областей [5].
3. Совершенствование методов оценки текстовых событий связаны с моделированием восприятия человеком позитивных или негативных событий и формирования у него соответствующего психоэмоционального настроения к причинам, вызывающим эти события [5].



## Заключение

В статье изложено решение задачи создания лингвистического инструментария и методики автоматического определения тональности новостных сообщений, связанных с качеством жизни рядового гражданина. Был определен подход для решения задачи, разработано программное обеспечение и методы автоматизированного создания словарей объектов и словарей оценочных предикатов, а также словарей модификаторов меры оценки. Проведенный эксперимент подтвердил правильность предложенной методики оценки событий, освещенных в новостных сообщениях и работоспособность программного комплекса.

Эта методика, при соответствующей выборке объектов оценки событий, может быть использована при создании тональных портретов конкретных авторов по совокупности их публикаций, а также тональных портретов различных новостных агрегатов по совокупности освещаемых ими событий в конкретный временной интервал.

Предлагаемый метод, основанный на методах автоматизированного составления словарей по текстам документов, методах семантико-синтаксического анализа и использования онтологических ресурсов, является универсальным поскольку позволяет проводить детальный семантический анализ коллекций документов по различным многомерным критериям. Комплекс тональных словарей большого объема и средства формализации текстов позволят проводить этот анализ с достаточно высокой точностью.

### Литература

1. Пазельская А.Г., Соловьев А.Н. Метод определения эмоций в текстах на русском языке. <http://www.dialog-21.ru/digests/dialog2011/materials/ru/pdf/50.pdf>
2. Клековникова М.В., Котельников Е.В. Метод автоматической классификации текстов по тональности, основанный на словаре эмоциональной лексики. <http://ceur-ws.org/Vol-934/paper15.pdf>
3. Посевкин Р.В., Бессмертный И.А. Применение сентимент анализа текстов для оценки общественного мнения. Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, № 1, том 15, 2015.
4. Ермаков С.А., Ермакова Л.М. Методы оценки эмоциональной окраски текстов. Вестник пермского университета. Вып. (1) 9, 2012 .
5. Хорошилов Ал-др. А., Никитин Ю.В., Хорошилов Ал-ей. А., Будско В.И. Автоматическое создание формализованного представления смыслового содержания неструктурированных текстовых сообщений СМИ и социальных сетей // Системы высокой доступности, № 3, том.10, 2014.
6. Калинин Ю.П., Хорошилов Ал-др. А., Хорошилов Ал-ей. А. Современные технологии автоматизированной обработки текстовой информации // Системы высокой доступности, № 2, том.11, 2015.
7. Будско В.И., Калинин Ю.П., Козеренко Е.Б., Хорошилов А.А., Хорошилов А.А. Машинная грамматика русского языка // Системы высокой доступности, № 3, том.13, 2017.
8. Кан А.В., Ревина В.Д., Руснак В.И., Хорошилов Ал-др А., Хорошилов Ал-сей А. Автоматическое формирование синтаксической модели языка для задач машинного перевода и информационного поиска. Сб. «Научно-техническая информация», Сер. 2, № 12, ВИНТИ, 2018.



## Determine the tonality of of news media reports by conceptual analysis

### ***Khoroshilov Al-dr A.***\*

Russian Academy of Sciences, professor of the Moscow  
Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
khoroshilov@mail.ru

### ***Kozlovskaya Y.D.***\*\*

Moscow Aviation Institute  
(National Research University), Moscow, Russia  
yana04029877@mail.ru

### ***Musabaev R.R.***\*\*\*

Institute of Information and Computational  
Technologies, Almaty, Kazakhstan  
rmusab@gmail.com

### ***Krasovitskiy A.M.***\*\*\*\*

Institute of Information and Computational  
Technologies, Almaty, Kazakhstan  
akrassovitskiy@gmail.com

### ***Khoroshilov Al-ey A.***\*\*\*\*\*

The 27th Central Research Institute of the Ministry  
of Defence of the Russian Federation, Moscow, Russia  
alex\_khor@mail.ru

The article describes the solution of the task of creating linguistic tools and the methodology of automatic determination of the tonality of news reports related to the quality of life of an ordinary citizen of the Republic of Kazakhstan. The approach

#### **For citation:**

Khoroshilov Al-dr A., Kozlovskaya Y.D., Musabaev R.R., Krasovitskiy A.M., Khoroshilov Al-ey A. Determine the tonality of of news media reports by conceptual analysis. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 67–79. doi: 10.17759/mda.2019090405 (In Russ., abstr. in Engl.)

\****Khoroshilov Aleksander Alekseevich***, Ph.D. (full doctor), lead fellow of the Federal research center «Informatics and management», Russian Academy of Sciences, professor of the Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow. E-mail: khoroshilov@mail.ru

\*\****Kozlovskaya Yana Dmitrievna***, student of the Institute of Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia. E-mail: yana04029877@mail.ru

\*\*\****Musabayev Rustam Rafikovich***, Cand.Eng.Sc, Head of the laboratory, Institute of Information and Computational Technologies, Kazakhstan. E-mail: rmusab@gmail.com

\*\*\*\****Krasovitskiy Aleksandr Mikhailovich***, Ph.D., lead fellow of Institute of Information and Computational Technologies, Kazakhstan. E-mail: akrassovitskiy@gmail.com

\*\*\*\*\****Khoroshilov Aleksey Alekseyevich***, Ph.D., Senior Research Officer of The 27th Central Research Institute of the Ministry of Defence of the Russian Federation. E-mail: alex\_khor@mail.ru



for solving the problem was defined, software and methods of automated creation of object dictionaries and evaluation predicate dictionaries, as well as evaluation measure modifier dictionaries were developed. The experiment confirmed the correctness of the proposed methodology for assessing events covered in news reports and the operability of the software complex.

This technique, with appropriate selection of event assessment objects, can be used in creating tonal portraits of specific authors on the set of their publications, as well as tonal portraits of various news aggregates on the set of events they cover in a particular time interval.

**Keywords:** conceptual analysis, predicate-actant structure, tonality of texts, tonal dictionary, tonality modifiers, automatic establishment of assessment of tonality of texts.

### **References**

1. Pazel'skaya A.G., Solov'ev A.N. Metod opredeleniya emotsii v tekstakh na russkom yazyke. <http://www.dialog-21.ru/digests/dialog2011/materials/ru/pdf/50.pdf>
2. Klekovnikova M.V., Kotel'nikov E.V. Metod avtomaticheskoi klassifikatsii tekstov po tonal'nosti, osnovannyi na slovare emotsional'noi leksiki. <http://ceur-ws.org/Vol-934/paper15.pdf>
3. Posevkin R.V., Bessmertnyi I.A. Primenenie sentiment analiza tekstov dlya otsenki obshchestvennogo mneniya. Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki, № 1, tom 15, 2015.
4. Ermakov S.A., Ermakova L.M. Metody otsenki emotsional'noi okraski tekstov. Vestnik permskogo universiteta. Vyp. (1) 9, 2012.
5. Khoroshilov Al-dr. A., Nikitin Yu.V., Khoroshilov Al-ei. A., Budsko V. I. Avtomaticheskoe sozdanie formalizovannogo predstavleniya smyslovogo sodержaniya nestrukturirovannykh tekstovykh soobshchenii SMI i sotsial'nykh setei // Sistemy vysokoi dostupnosti, № 3, tom.10, 2014.
6. Kalinin Yu.P., Khoroshilov Al-dr. A., Khoroshilov Al-ei. A. Sovremennye tekhnologii avtomatizirovannoi obrabotki tekstovoi informatsii // Sistemy vysokoi dostupnosti, № 2, tom.11, 2015.
7. Budzko V.I., Kalinin Yu.P., Kozerenko E.B., Khoroshilov A.A., Khoroshilov A.A. Mashinnaya grammatika russkogo yazyka // Sistemy vysokoi dostupnosti, № 3, tom.13, 2017.
8. Kan A.V., Revina V.D., Rusnak V.I., Khoroshilov Al-dr A., Khoroshilov Al-sei A. Avtomaticheskoe formirovanie sintaksicheskoi modeli yazyka dlya zadach mashinnogo perevoda i informatsionnogo poiska. Sb. «Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya», Ser. 2, № 12, VINITI, 2018.



## Использование web-сервисов для повышения согласованности суждений матриц парных сравнений

**Куренных А.Е.** \*

МАИ, Москва, Россия  
alexey.kurennykh@gmail.com

**Судаков В.А.** \*\*

МАИ, Москва, Россия  
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия  
sudakov@ws-dss.com

**Осипов В.П.** \*\*\*

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия  
РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия  
osipov@keldysh.ru

Парные сравнения критериев и альтернатив широко применяются в большом количестве актуальных технических и научных задач современности, в которых требуется провести ранжирование конечного множества объектов или выполнить оценку какого-либо объекта. Парные сравнения понятны и просты для эксперта, являются качественным и достоверным способом выставления оценок, однако стоит отметить, что сложность и размерность пространства критериев во многих задачах ведет к оказанию высокой нагрузки

### Для цитаты:

*Куренных А.Е., Судаков В.А., Осипов В.П.* Использование web-сервисов для повышения согласованности суждений матриц парных сравнений // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 80–87. doi: 10.17759/mda.2019090406

\***Куренных Алексей Евгеньевич**, аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия, E-mail: alexey.kurennykh@gmail.com

\*\***Судаков Владимир Анатольевич**, доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), Москва, Россия. E-mail: sudakov@ws-dss.com.

\*\*\***Осипов Владимир Петрович**, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН), ведущий научный сотрудник, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова (РЭУ им. Г.В. Плеханова), Москва, Россия. E-mail: osipov@keldysh.ru



возникать некорректные или ошибочные ситуации, ведущие к снижению согласованности суждений, а, в следствие, к принятию нерациональных решений. Алгоритмическое обеспечение для повышения согласованности суждений является востребованными среди экспертов и исследователей, что, в совокупности с большим количеством разнообразных задач, формирует требования по разработке соответствующего программного обеспечения: возможность доступа большого числа пользователей и независимость от предметной области, которые в высокой степени удовлетворяются web-интерфейсом. В данной работе авторы приводят описание эффективного метода повышения согласованности суждений в матрицах парных сравнений. Основная задача метода – максимальное повышение согласованности суждений при минимуме изменений, вносимых в матрицу, предложенную экспертом в качестве первоначальных оценок. В качестве количественной меры согласованности суждений используется классический показатель – индекс согласованности. На основании созданного алгоритма авторами было разработано программное обеспечение, которое доступно для исследователей в распределенных web-сервисах для поддержки принятия решений ws-dss.com.

**Ключевые слова:** парные сравнения, индекс согласованности, повышение согласованности, поддержка принятия решений, web-сервисы.

## Введение

Одной из основных задач в поддержке принятия решений является ранжирование конечного множества объектов (альтернатив), которые характеризуются конечным числом критериев, благодаря которым является возможным проводить сравнение между собой предметов ранжирования. В случае сложной научной или технической задачи, когда размерность множества альтернатив достаточно велика, а каждая из них, при этом, характеризуется своим множеством критериев, их ручной анализ становится затруднительным и, как правило, невозможным, что вынуждает использовать специализированное программное обеспечение – системы поддержки принятия решений (СППР), реализующие математический аппарат теории принятия решений. Современный уровень научно-технического развития требует применения СППР в самых разнообразных областях [1–3], процессы деятельности в которых зачастую сопровождаются рисками, требуют тщательного планирования и анализа каждого управленческого решения [4, 5]. В настоящее время существует большое количество методов, позволяющих выполнять ранжирование объектов, среди которых одним из самых распространенных и известных является метод парных сравнений. Применение метода парных сравнений берет свое начало более двухсот лет назад в работах Мари Кондорсе [6] и Жана-Шарля де Борда [7], посвященных проблемам голосований. В первой половине XX века метод приобрел большую популярность и с тех пор применяется в различных задачах, таких как метод анализа иерархий [8], в области здравоохранения [9], менеджмента [10, 11] и пр.

Цель проводимого авторами исследования заключается в разработке алгоритмического и программного обеспечения, задача которого – вырабатывать рекомендации по повышению точности и корректности приводимых экспертами матриц парных сравнений за счет повышении согласованности суждений, выражаемой индексом согласованности.



## Постановка задачи

В процессе оценивания  $n$  объектов составляется квадратная положительная обратнo-симметричная матрица  $\mathbf{A}$ , на главной диагонали которой стоят единицы, а остальными ее элементами являются степени предпочтительности одного объекта над другим:

$$\mathbf{A} = \|\|a_{i,j}\|\|: a_{i,j} > 0; a_{i,i} = 1; a_{j,i} = \frac{1}{a_{i,j}}, \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Особое внимание стало уделяется такому показателю как согласованность суждений эксперта. Наиболее известный и распространенный  $CI_{\mathbf{A}}$  способ количественно оценить этот показатель – использовать индекс согласованности, предложенный Томасом Л. Сати. Этот показатель можно вычислить, имея максимальное собственное значение  $\lambda_{max}$  матрицы и зная ее размер  $n$ :

$$CI_{\mathbf{A}} = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Принято считать,  $CI_{\mathbf{A}} \leq 0,1$  что матрица парных сравнений хорошо согласована, если выполняется неравенство, однако на практике это условие часто нарушается ввиду целого ряда причин, среди которых можно отметить основные:

- многие распространенные программные средства для поддержки принятия решений и многокритериального анализа альтернатив имеют функционал, позволяющий только оценить индекс согласованности, но никак не могут помочь лицу, принимающему решения, или эксперту в устранении некорректных суждений;
- исправление нарушений транзитивности суждений – крайне трудоемкий процесс, который требует проведения повторного анализа предметной области, в задаче которой применяются парные сравнения.

Авторы данной работы рассматривают следующую постановку оптимизационной задачи в процессе разработки алгоритмического и программного обеспечения для повышения согласованности суждений в матрицах парных сравнений:

$$\min_{x_{i,j} \in \mathbb{R}} CI_{\mathbf{A}+\mathbf{X}}.$$

При ограничении на количество корректируемых элементов:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} sgn^2(x_{i,j}) \leq K; K \leq \frac{n^2 - n}{2}.$$

В данной постановке задачи приняты следующие обозначения:

$\mathbf{X} = \|\|x_{i,j}\|\|; i, j = \overline{1, n}$  – действительная матрица корректировок к исходной матрице парных сравнений, которая рассчитывается оптимизационным алгоритмом;  $K$  – ограничение на количество изменяемых элементов, которое задается экспертом.

## Метод решения задачи

Как уже было отмечено ранее, метод парных сравнений широко применяется в совершенно различных предметных областях, поэтому в процессе программной реализации предложенного алгоритма расчета матрицы корректировок было важно обеспечить возможность широкого доступа, инвариантность относительно предметной области а также прикладного программного обеспечения, с которым работает человек, стабильную ско-



рость работы, а также следовать требованиям кросс-платформенности и независимости от используемых аппаратных средств. Удовлетворить вышеперечисленные критерии можно только с помощью web-сервисов, реализующих распределенные облачные вычисления. Примером таких сервисов является ws-dss.com, который разработан с учетом каркасной архитектуры, и содержит набор методов для проведения многокритериального анализа альтернатив, моделирования и оптимизации.

Программная реализация метода повышения согласованности была выполнена с использованием языков программирования R и Ruby, которые отвечают за функциональную составляющую алгоритма, реализующую метод Improved stochastic ranking evolution strategy (ISRES) [12, 13]. Реализация рассматриваемого алгоритма в web-среде позволила достичь следующих положительных качеств:

- к разработанному алгоритму есть доступ с любого устройства, имеющего выход в Интернет из любой точки мира, будь то персональный компьютер, планшет или смартфон;
- процессы вычислений реализованы на серверной части, что не требует высоких технических характеристик комплекса технических средств пользователя;
- разработанный метод можно вызвать из любой специализированной прикладной программы по протоколу http(s), таким же способом web-сервисы передают ответ с результатом вычислений обратно в прикладную программу. Это позволяет расширять функционал уже разработанных средств для поддержки принятия решений посредством обращений к сервисам ws-dss для дополнительной обработки данных.

Схема обмена данными между прикладной программой и web-сервисами реализована с использованием технологии RESTfulAPI, где используются стандартные методы протокола http(s), а данные передаются в формате JSON. Выбор такого формата информационного обмена обусловлен повсеместным распространением данной технологии, которая может быть реализована в любой современной системе программирования под управлением любой операционной системы.

## Апробация и обсуждение результатов

Для целей апробации предложенного метода была составлена матрица парных сравнений (рис. 1). Для полученной матрицы были рассчитаны веса, максимальное собственное значение, ИС и другие показатели, приведенные на нижней части рис. 1.

The screenshot shows the ws-dss.com interface. At the top, there is a navigation bar with links: "Задачи", "Модели", "Экспертные оценки", and "Об авторе". Below the navigation bar, the method name "pairwise\_comparison" and the user name are displayed. The "Входные данные:" (Input data) section shows a JSON object with a 5x5 pairwise comparison matrix. The "Выходные данные:" (Output data) section shows a JSON object with calculated weights, the maximum eigenvalue, the consistency index (ИС), the random consistency index, and the consistency ratio.

```
{ "matrix": [
  [1.00000, 4.00000, 5.00000, 8.00000, 3.00000],
  [0.25000, 1.00000, 5.00000, 4.00000, 2.00000],
  [0.20000, 0.20000, 1.00000, 0.25000, 6.00000],
  [0.12500, 0.25000, 4.00000, 1.00000, 0.20000],
  [0.33333, 0.50000, 0.16667, 5.00000, 1.00000]
]
}

{
  "weight": [
    0.5097114656488333,
    0.23500448752386804,
    0.0844707607502014,
    0.07090292587992238,
    0.09991036019717486
  ],
  "_lambda_max": 6.164999326670026,
  "consistency index": 0.2912498316675065,
  "random consistency index": 1.12,
  "consistency ratio": 0.2600444925602736
}
```

Рис. 1. Исходная матрица парных сравнений.



По значению  $\text{consistency\_index} = 0,2912$  видно, что согласованность суждений в данной матрице является недостаточной. После этого был использован предложенный алгоритм подбора вариаций двух элементов исходной матрицы и выполнен повторный расчет ИС. В результате расчетов получились следующие корректировки и новое значение ИС, которое удовлетворяет требованиям (рис. 2):

```
Method: consistency_increase
User:
Input data:
{
  "matrix": [
    [1.00000, 4.00000, 5.00000, 8.00000, 3.00000],
    [0.25000, 1.00000, 5.00000, 4.00000, 2.00000],
    [0.20000, 0.20000, 1.00000, 0.25000, 6.00000],
    [0.12500, 0.25000, 4.00000, 1.00000, 0.20000],
    [0.33333, 0.50000, 0.16667, 5.00000, 1.00000]
  ],
  "cnt": 2
}

Output data:
{
  "best consistency": 0.053555296626156323,
  "changes": [
    {
      "items": [
        [
          2,
          3
        ],
        [
          2,
          4
        ]
      ]
    },
    "deltas": [
      1.1204,
      -5.5945
    ]
  ]
}
```

Рис. 2. Вариации элементов матрицы парных сравнений и оптимальная согласованность.

На рисунках можно видеть, что система корректно обработала введенную матрицу с учетом заданного ограничения на количество вариаций, а полученный ИС удовлетворяет условию согласованности матрицы. Соответственно, данную матрицу можно использовать для вычисления весов критериев и последующих процедур в процессе поддержки принятия решений.

## Заключение

Предложенный способ реализации алгоритма повышения согласованности матриц парных сравнений показал хорошие результаты на тестовых данных и полностью удовлетворяет критерию оптимизации, а также наложенным ограничениям. Время расчетов является удовлетворительным и может сокращаться за счет применения параллельных вычислений. Разработанное программное обеспечение соответствует требованиям каркасной архитектуры, а также расположено в общем доступе для использования в сторонних системах поддержки принятия решений. Перспективным направлением продолжения исследования является масштабная апробация алгоритма с привлечением экспертов, которые смогли бы оценить результаты использования алгоритма, а также, по возможности, предложить способы повышения его эффективности.

### Финансирование

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, проект 18-01-00382а.



### *Литература*

1. *T. Saaty, P. Pierfrancesco*. Rethinking Design and Urban Planning for the Cities of the Future // Buildings, vol. 7, 76, pp. 1–22, 2017.
2. *K.F. Yuen*. The fuzzy cognitive pairwise comparisons for ranking and grade clustering to build a recommender system: An application of smartphone recommendation // Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 61, 2017, pp. 136–151.
3. *M. Groves, J. Branke*. Top- $\kappa$  selection with pairwise comparisons // European Journal of Operational Research, Vol. 274, 2, 2019, pp. 615–626.
4. *Huin S.F*. Managing deployment of ERP systems in SMEs using multiagents // International Journal of Project Management. Vol.22. N.6. pp.511–517. 2004.
5. *Batkovskiy A.M., Kurennykh A.E., Semenova E.G., Sudakov, V.A., Fomina, A.V., Balashov, V.M.* Sustainable project management for multi-agent development of enterprise information systems // Entrepreneurship and Sustainability Issues 7(1). pp.278–290. 2019.
6. *M. Condorcet*, “Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisionsrendues à la pluralité des voix”, Paris, 1785.
7. *J.C. de Borda*, “Mémoire sur les élections au scrutin”, Histoire de l’Académie Royale des Sciences, Paris, 1781.
8. *T.L.Saaty*, The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resources Allocation. McGraw-Hill, New York, 1980.
9. *T. Kakiashvili, M. Woodbury*. Smith Improving the medical scale predictability by the pairwise comparisons method: evidence from a clinical data study. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 105, 2012, pp. 210–216.
10. *K. Kulakowski, J. Szybowski, R. Tadeusiewicz*, Tender with Success – The Pairwise Comparisons Approach, Procedia Computer Science, Vol. 35, 2014, pp. 1122–1131.
11. *A. Kalinowska, T. Trzaskalik*. Bonus Distribution for Employees of a Telephone Customer Service Department: A Case Study based on Pairwise Comparisons, Procedia Computer Science, Vol. 35, 2014, pp. 1145–1154.
12. *T. Runarsson, X. Yao*, “Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization”, Evolutionary Computation, IEEE Transactions, on. 4, 2000, pp. 284–294.
13. *T. Runarsson, X. Yao*, “Search Biases in Constrained Evolutionary Optimization”, Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on. 35, 2005, pp. 233–243.



## The usage of Web services for consistency improvement in pairwise comparison matrixes

**Kurennykh A.E.** \*

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

alexey.kurennykh@gmail.com

**Sudakov V.A.** \*\*

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

sudakov@ws-dss.com

**Osipov V.P.** \*\*\*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

osipov@keldysh.ru

Paired comparisons of criteria and alternatives are widely used in a large number of technical and scientific problems of the present, in which it is necessary to rank a finite set of objects or to evaluate an object. Paired comparisons are understandable and simple for an expert, they are a high-quality and reliable way of rating, however, it is known that the complexity and dimension of the criteria space in many problems leads to a high load on the expert, as a result of which incorrect or erroneous situations may arise when compiling matrixes of paired comparisons leading to a decrease in the coherence of judgments, and, as a consequence, to the adoption of irrational decisions. Algorithmic software to increase the consistency of judgments is in demand among experts and researchers, which, together with a large number of diverse tasks, creates requirements for the development of appropriate software: the ability to access a large number of users and independence from the subject area, which are highly satisfied by the web interface. In this paper, the authors describe an effective method for increasing the consistency of judgments in matrixes of pairwise comparisons. The main objective of the method is to maximize the consistency of judgments with a minimum of changes made to the matrix proposed by the expert as initial estimates. As a quantitative measure of consistency of judgments, a classic indicator is used – the index of consistency. Based on the created algorithm, the authors developed software that is available to researchers in distributed web services to support decision-making ws-dss.com.

### For citation:

Kurennykh A.E., Sudakov V.A., Osipov V.P. The Usage of Web Services for Consistency Improvement in Pairwise Comparison Matrixes. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 80–87. doi: 10.17759/mda.2019090406 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Kurennykh Alexey Evgenevich**, graduate student, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, E-mail: alexey.kurennykh@gmail.com

\*\***Sudakov Vladimir Anatolievich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia. E-mail: sudakov@ws-dss.com

\*\*\***Osipov Vladimir Petrovich**, Ph.D. (technical sciences), leading researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, leading researcher, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia, E-mail: osipov@keldysh.ru



**Keywords:** paired comparisons, consistency index, increased consistency, decision support, web services.

### **Funding**

This research was supported by RFBR № 18–01–00382a.

### **References**

1. T. Saaty, P. Pierfrancesco Rethinking Design and Urban Planning for the Cities of the Future // Buildings, vol. 7, 76, pp. 1–22, 2017.
2. K.F. Yuen The fuzzy cognitive pairwise comparisons for ranking and grade clustering to build a recommender system: An application of smartphone recommendation // Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 61, 2017, pp. 136–151.
3. M. Groves, J. Branke Top- $\kappa$  selection with pairwise comparisons // European Journal of Operational Research, Vol. 274, 2, 2019, pp. 615–626.
4. Huin S.F. Managing deployment of ERP systems in SMEs using multiagents // International Journal of Project Management. Vol.22. N.6. pp.511–517. 2004.
5. Batkovskiy A.M., Kurennykh A.E., Semenova E.G., Sudakov, V. A., Fomina, A. V., Balashov, V.M. Sustainable project management for multi-agent development of enterprise information systems // Entrepreneurship and Sustainability Issues 7(1). pp.278–290. 2019.
6. M. Condorcet, “Essai sur l’application de l’analyse à la probabilité des décisionsrendues à la pluralité des voix”, Paris, 1785.
7. J.C. de Borda, “Mémoire sur les élections au scrutin”, Histoire de l’Académie Royale des Sciences, Paris, 1781.
8. T.L.Saaty, The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resources Allocation. Mcgraw-Hill, New York, 1980.
9. T. Kakiashvili, M. Woodbury-Smith Improving the medical scale predictability by the pairwise comparisons method: evidence from a clinical data study. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 105, 2012, pp. 210–216.
10. K. Kułakowski, J. Szybowski, R. Tadeusiewicz, Tender with Success – The Pairwise Comparisons Approach, Procedia Computer Science, Vol. 35, 2014, pp. 1122–1131.
11. A. Kalinowska, T. Trzaskalik Bonus Distribution for Employees of a Telephone Customer Service Department: A Case Study based on Pairwise Comparisons, Procedia Computer Science, Vol. 35, 2014, pp. 1145–1154.
12. T. Runarsson, X. Yao, “Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization”, Evolutionary Computation, IEEE Transactions, on. 4, 2000, pp. 284–294.
13. T. Runarsson, X. Yao, “Search Biases in Constrained Evolutionary Optimization”, Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on. 35, 2005, pp. 233–243.



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 004.9, 519.85

## **Градиентные методы оптимизации в машинном обучении идентификации параметров динамических систем**

***Пантелеев А.В.\****

МАИ, Москва, Россия  
avpanteleev@inbox.ru

***Лобанов А.В.\*\****

МАИ, Москва, Россия  
lobbsasha@mail.ru

В статье рассматривается один из возможных способов решения задачи оценки неизвестных параметров динамических моделей, описываемых дифференциально–алгебраическими уравнениями. Оценка параметров производится по результатам наблюдений за поведением математической модели. Их значения находятся в результате минимизации критерия, описывающего суммарное квадратическое отклонение значений координат вектора состояния от полученных при измерениях точных значений в различные моменты времени. На значения параметров наложены ограничения параллелепипедного типа. Для решения задачи оптимизации предлагается использовать градиентные методы оптимизации, используемые в процедурах машинного обучения: метод стохастического градиентного спуска, классический метод моментов, ускоренный градиентный метод Нестерова, метод адаптивного градиента, метод скользящего среднего, метод адаптивной оценки моментов, модификация метода адаптивной оценки, ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки. Приведен пример идентификации параметров линейной математической модели, описывающей изменение

**Для цитаты:**

*Пантелеев А.В., Лобанов А.В.* Градиентные методы оптимизации в машинном обучении идентификации параметров динамических систем // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 88–99. doi: 10.17759/mda.2019090407

**\*Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико–математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E–mail: avpanteleev@inbox.ru

**\*\*Лобанов Александр Владимирович**, студент бакалавриата института «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E–mail: lobbsasha@mail.ru



характеристик химического процесса, на котором продемонстрирована сравнительная эффективность методов оптимизации выбранной группы. Применяемые методы поиска экстремума не гарантируют нахождения результата – глобального экстремума, но позволяют получать решение достаточно хорошего качества за приемлемое время. Приведены результаты расчетов всеми перечисленными методами оптимизации, даны рекомендации по выбору параметров методов. Полученные численные результаты продемонстрировали эффективность предложенного подхода. Найденные приближенные значения оцениваемых параметров незначительно отличаются от лучших известных решений, полученных другими способами.

**Ключевые слова:** условная оптимизация, машинное обучение, градиентные методы машинного обучения, оценка параметров.

## Введение

Задача нахождения оценок параметров динамических моделей имеет достаточно длинную историю. Большинство работ в этой области основано на вероятностном подходе, когда оценка неслучайного параметра является случайной величиной из-за проявления различных факторов. Существуют методы для построения точечных оценок, например, метод максимального правдоподобия. Как правило, при их применении исследуются статистические свойства этих оценок: несмещённость, сходимость к точному значению. Во многих случаях недостаточно иметь только точечные оценки, поэтому необходимо знать, в каких пределах находится точное значение параметра с заданной надёжностью, что связано с проблемой построения доверительных интервалов. Все перечисленные подходы основаны на том, что имеется какая-то информация об исследуемом явлении, например, известны наблюдения за реализацией случайной величины, т.е. задана выборка. На основе этой информации разрабатывались алгоритмы для построения оценок [1].

Другим направлением исследований является применение прямых методов оптимизации. В данной работе рассматривается математическая модель динамической системы с неизвестными параметрами, описываемая системой дифференциальных уравнений. На каждый параметр могут быть наложены ограничения в виде отрезка с фиксированными концами. Известны результаты наблюдения за состоянием системы в определённые моменты времени функционирования системы. Целевая функция характеризует сумму квадратов отклонений значений всех компонент решения системы дифференциальных уравнений в заданные моменты времени от полученных в результате измерений значений координат вектора состояния модели. Ставится задача минимизации целевой функции на множестве возможных значений параметров, удовлетворяющих заданным ограничениям. Для решения таких задач существует множество классических методов нулевого, первого и второго порядков [2], однако их реализация может быть связаны с завышенными требованиями к элементам постановки задачи. Альтернативой является применение метаэвристических алгоритмов [3, 4], которые позволяют получить решение достаточно хорошего качества за приемлемое время. В то же время, с ростом числа переменных решение требует значительных вычислительных ресурсов.

Поскольку в данном случае задача оценивания неизвестных параметров похожа на задачу линейной регрессии, которая может быть решена с помощью алгоритмов машинного обучения, то предлагается применить методы этой распространенной группы [5].



Кроме того, наблюдения о координатах вектора состояния модели получаются в ходе физических измерений, поэтому есть все основания предполагать, что они производятся с ошибкой, а целевая функция имеет смысл среднего квадратичного отклонения.

Применены следующие градиентные методы оптимизации: метод стохастического градиентного спуска (Stochastic Gradient Descent, SGD), классический метод моментов (Classical Momentum), ускоренный градиентный метод Нестерова (Nesterov Accelerated Gradient, NAG), метод адаптивного градиента (Adaptive Gradient, AdaGrad), метод скользящего среднего (Root Mean Square Propagation, RMSProp), метод адаптивной оценки моментов (Adaptive Moment Estimation, Adam), модификация метода Adam (Adamax), ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов (Nesterov-accelerated Adaptive Moment Estimation, Nadam). Они позволяют найти приближённое решение за приемлемое время при работе с большими данными. Как правило, методы имеют много параметров, которые необходимо выбрать, и для разных задач эти параметры могут отличаться. В работе предложены некоторые рекомендации по выбору параметров этих методов.

## Постановка задачи

Дана целевая функция:

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j))^2 \rightarrow \min_{\theta \in \Theta}$$

Ограничения:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \theta), \\ x(t_0) = x_0, \\ \theta \in \Theta = \{ \theta \in R^p \mid a_i \leq \theta_i \leq b_i, i = 1, \dots, p \}. \end{cases}$$

где  $f(t, x, \theta)$  – известная непрерывно-дифференцируемая вектор-функция,  $t \in [t_0, t_e]$  – время функционирования системы,  $\theta \in \Theta$  – вектор неизвестных параметров системы,  $\Theta \subseteq R^p$  – множество возможных значений параметров,  $x \in R^n$  – вектор состояния системы,  $x_0 \in R^n$  – вектор начального состояния. На промежутке времени  $[t_0, t_e]$  известны наблюдения  $\hat{x}(t)$  за вектором состояния системы в моменты времени  $t = t_j \in [t_0, t_e]$ ,  $j = 1, \dots, T$ . При фиксированном векторе параметров  $\theta$  можно найти решение  $x(\theta, t)$  системы дифференциальных уравнений. Требуется найти оценку вектора неизвестных параметров  $\theta$ , при которой  $x(\theta, t)$  наилучшим образом согласуется с наблюдениями, т.е. обеспечивается минимальное значение целевой функции  $E(\theta)$ .

## Алгоритмы решения задачи

Для решения задачи предлагается применить следующие методы.

**A. Метод стохастического градиентного спуска (Stochastic Gradient Descent, SGD):**

$$\begin{aligned} \theta^{k+1} &= \theta^k - \alpha_k \nabla_{\theta} L(\theta^k, \hat{x}(t_j), t_j) = \\ &= \theta^k - \alpha_k \nabla_{\theta} \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^n (\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j))^2 \right]}_{L(\theta^k, \hat{x}(t_j), t_j)}, \end{aligned}$$



где  $\alpha_k > 0, k = 0, 1, \dots$  – величина шага,  $t_j$  – случайный момент времени на множестве  $T$ , выбираемый на каждой  $k$  – й итерации заново;  $\nabla_{\theta}$  – градиент по вектору параметров.

**Б. Классический метод моментов (Classical Momentum):**

$$\begin{aligned}\theta^{k+1} &= \theta^k - \alpha_k v^k, \\ v^{k+1} &= \beta v^k + (1 - \beta) \nabla_{\theta} L(\theta^k, \hat{x}(t_j), t_j),\end{aligned}$$

где  $v^0 = 0, \beta = 0.9$ .

**В. Ускоренный градиентный метод Нестерова (Nesterov Accelerated Gradient, NAG)**

для решения задачи  $f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$ :

Шаг 1. Задать параметры:

$\gamma, \gamma \in (0, 1)$  – коэффициент сохранения ( $\gamma = 0,9$ );  $\eta$  – коэффициент влияния новой информации;  $x^0 \in R^n$  – начальная точка;  $v^0 = \mathbf{o}$ ;  $\varepsilon_1 > 0$ .

Положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Положить  $k = k + 1$  и выполнить:

$$\begin{aligned}y^k &= x^k - \gamma v^{k-1} \\ g^k &= \nabla f^k(y^k) \\ v^k &= \gamma v^{k-1} + \eta g^k\end{aligned}$$

Шаг 3. Вычислить

$$x^k = x^{k-1} - v^k$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия  $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon_1$ .

Если условие выполнено, то  $x^* = x^k$ . Иначе перейти к шагу 2.

**Г. Метод адаптивного градиента (Adaptive Gradient, AdaGrad) для решения задачи :**

$$f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

Шаг 1. Задать параметры:

$\gamma, \gamma \in (0, 1)$  – коэффициент сохранения ( $\gamma = 0,9$ );  $\eta$  – скорость обучения (обычно  $\eta = 0,01$ );  $x^0 \in R^n$  – начальная точка;  $\varepsilon = 10^{-6} \div 10^{-8}$  – сглаживающий параметр;  $\varepsilon_1 > 0$ ;  $G^{-1} = \mathbf{o}$ .

Положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Положить

$$\begin{aligned}g^k &= \nabla f^k(x^k); \\ G^k &= G^{k-1} + g^k \odot g^k,\end{aligned}$$

где  $\odot$  – поэлементное произведение матриц по Адамару.

Шаг 3. Вычислить

$$x^{k+1} = x^k - \eta g^k \oslash \sqrt{G^k + \varepsilon},$$

где  $\oslash$  – операция поэлементного деления матриц.

Шаг 4. Проверить выполнение условия  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_1$ .

Если условие выполнено, то  $x^* = x^{k+1}$ . Иначе положить  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2.

**Д. Метод скользящего среднего (Root Mean Square Propagation, RMSProp) для решения задачи  $f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$ :**



Шаг 1. Задать параметры:

$\gamma$ ,  $\gamma \in (0, 1)$  – коэффициент сохранения ( $\gamma = 0,9$ );  $x^0 \in R^n$  – начальная точка;  
 $\varepsilon = 10^{-6} \div 10^{-8}$  – сглаживающий параметр;  $\varepsilon_1 > 0$ ;  $\eta$  – величина шага (обычно  
 $\eta = 0,001$ );  $M^{-1} = \mathbf{o}$ .

Положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Положить

$$\begin{aligned} g^k &= \nabla f^k(x^k); \\ G^k &= g^k \odot g^k; \\ M^k &= \gamma M^{k-1} + (1 - \gamma)G^k. \end{aligned}$$

Шаг 3. Вычислить

$$x^{k+1} = x^k - \eta g^k \odot \sqrt{M^k + \varepsilon}.$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_1$ .

Если условие выполнено, то  $x^* = x^{k+1}$ . Иначе положить  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2.

**Е. Метод адаптивной оценки моментов** (Adaptive Moment Estimation, Adam) для решения задачи  $M[f(x)] \rightarrow \min$ , имеются случайные реализации  $f^1(x), f^2(x), \dots, f^K(x)$ :

Шаг 1. Задать параметры:

$\alpha = 0,001$  – величина шага;  $\beta_1 = 0,9$ ;  $\beta_2 = 0,999$  – параметры оценки моментов,  
 $x^0 \in R^n$  – начальная точка;  $\varepsilon = 10^{-8}$  – сглаживающий параметр;  $\varepsilon_1 > 0$ ;  
 $m^0 = \mathbf{o}$  – начальное значение первого вектора моментов  $M[\nabla f(x)]$ ;  $v^0 = \mathbf{o}$  – начальное значение второго вектора моментов  $M[\nabla f(x) \odot \nabla f(x)]$ .

Положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Положить  $k = k + 1$

$$\begin{aligned} g^k &= \nabla f^k(x^{k-1}); \\ m^k &= \beta_1 m^{k-1} + (1 - \beta_1)g^k; \\ G^k &= g^k \odot g^k; \\ v^k &= \beta_2 v^{k-1} + (1 - \beta_2)G^k; \\ \hat{m}^k &= \frac{m^k}{1 - \beta_1^k}; \\ \hat{v}^k &= \frac{v^k}{1 - \beta_2^k}. \end{aligned}$$

Шаг 3. Вычислить

$$x^k = x^{k-1} - \alpha \hat{m}^k \odot \sqrt{\hat{v}^k + \varepsilon}.$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_1$ .

Если условие выполнено, то  $x^* = x^k$ . Иначе перейти к шагу 2.

**Ж. Модификация метода Adam (Adamax)** для решения задачи  $M[f(x)] \rightarrow \min$ , где  $f(x) \in C^1$ . Имеются случайные реализации  $f^1(x), f^2(x), \dots, f^K(x)$ :



Шаг 1. Задать параметры

$\alpha = 0,002$  – величина шага;  $\beta_1 = 0,9$ ;  $\beta_2 = 0,999$  – параметры оценки моментов,  $\beta_i \in [0,1)$ ;  $x^0 \in R^n$  – начальная точка;  $\varepsilon = 10^{-8}$  – сглаживающий параметр;  $\varepsilon_1 > 0$ ;  $m^0 = \mathbf{o}$  – начальное значение первого вектора моментов  $M[\nabla f(x)]$  ;  
 $u^0 = \mathbf{o}$ .

Положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Положить  $k = k + 1$

$$g^k = \nabla f^k(x^{k-1}) ;$$

$$m^k = \beta_1 m^{k-1} + (1 - \beta_1) g^k ;$$

$u^k = \max\{\beta_2 u^{k-1}, |g^k|\}$  (операция **max** выполняется поэлементно);

Шаг 3. Вычислить

$$x^k = x^{k-1} - \frac{\alpha}{1 - \beta_1^k} m^k \odot u^k .$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_1$ .

Если условие выполнено, то  $x^* = x^k$ . Иначе перейти к шагу 2.

### 3. Ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов (Nesterov–accelerated Adaptive Moment Estimation, Nadam).

Шаг 1. Задать параметры:

$\alpha = 0,002$  – величина шага;  $\beta_1 = 0,975$ ;  $\beta_2 = 0,999$  – параметры оценки моментов,  $x^0 \in R^n$  – начальная точка;  $\varepsilon = 10^{-8}$  – сглаживающий параметр;  $\varepsilon_1 > 0$ ;  
 $m^0 = \mathbf{o}$  – начальное значение первого вектора моментов  $M[\nabla f(x)]$ ;  
 $v^0 = \mathbf{o}$  – начальное значение второго вектора моментов  $M[\nabla f(x) \odot \nabla f(x)]$ .

Положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Положить  $k = k + 1$

$$g^k = \nabla f^k(x^{k-1}) ;$$

$$m^k = \beta_1 m^{k-1} + (1 - \beta_1) g^k ;$$

$$G^k = g^k \odot g^k ;$$

$$v^k = \beta_2 v^{k-1} + (1 - \beta_2) G^k ;$$

$$\hat{m}^k = \frac{\beta_1 m^k}{1 - \beta_1^{k+1}} - \frac{(1 - \beta_1) g^k}{1 - \beta_1^k} ;$$

$$\hat{v}^k = \frac{\beta_2 v^k}{1 - \beta_2^k} .$$

Шаг 3. Вычислить

$$x^k = x^{k-1} - \alpha \hat{m}^k \odot \sqrt{\hat{v}^k + \varepsilon}$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_1$ .

Если условие выполнено, то  $x^* = x^k$ . Иначе перейти к шагу 2.



## Стратегия поиска решения задачи оценки параметров

Для нахождения неизвестных параметров необходимо решить задачу условной оптимизации (1). Сложность задачи заключается в том, что целевая функция зависит от решения системы дифференциальных уравнений (2). Если система линейная, то удаётся найти аналитическое решение, что позволяет находить производные целевой функции по параметру и пользоваться градиентными методами оптимизации процедур машинного обучения. Если система нелинейная, то рекомендуется либо применять методы нулевого порядка (адаптивный метод случайного поиска, метод случайного поиска с последовательной редукцией области исследования [3]), либо использовать конечно-разностные аппроксимации для нахождения частных производных по параметрам.

### Пример решения задачи оценки параметров

Математическая модель описывает необратимую реакцию первого порядка, в которой измеряются концентрации  $x_1, x_2$  компонент веществ, а  $\theta_1, \theta_2$  – коэффициенты скоростей реакций соответственно [6, 7]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\theta_1 x_1(t), & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = \theta_1 x_1(t) - \theta_2 x_2(t), & x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Целевая функция имеет следующий вид:

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^2 [\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j)]^2 \rightarrow \min_{\theta \in \Theta}, \quad T = 10, n = 2$$

Ограничения на параметры следующие:

$$0 \leq \theta_1 \leq 10, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 10.$$

В таблице 1 представлены результаты наблюдений за реакцией.

Таблица 1. Наблюдения

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_j$	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1
$\hat{x}_1$	0,606	0,368	0,223	0,135	0,082	0,050	0,030	0,018	0,011	0,007
$\hat{x}_2$	0,373	0,564	0,647	0,669	0,656	0,624	0,583	0,539	0,494	0,451

Наилучшее известное решение [6,7]: значение целевой функции:  $1,18584 \cdot 10^{-6}$ ; вектор параметров:  $\theta = (5,0035; 1,0000)^T$ . Сравнимые результаты, полученные с помощью метода фейерверков, метода большого взрыва – большого сжатия и метода гранат, приведены в [4].

Для решения задачи применим описанные в разд. 2 алгоритмы оптимизации. Их применение требует вычисления градиента целевой функции. Поскольку система дифференциальных уравнений является линейной, то имеется возможность точного нахождения частных производных целевой функции по искомым параметрам. Поясним процедуру подробно.

Решим систему дифференциальных уравнений методом сведения к одному дифференциальному уравнению.



Выразим  $x_1$  из второго уравнения  $\frac{dx_2}{dt} = \theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 : x_1 = \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{dx_2}{dt} + \theta_2 x_2 \right)$ .

Дифференцируем по  $t$  обе части полученного уравнения:  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \theta_2 \frac{dx_2}{dt} \right)$ .

Подставим последнее соотношение и  $x_1 = \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{dx_2}{dt} + \theta_2 x_2 \right)$  в первое уравнение системы  $\frac{dx_1}{dt} = -\theta_1 \cdot x_1$ :

$$\frac{1}{\theta_1} \cdot \left( \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \theta_2 \frac{dx_2}{dt} \right) = -\theta_1 \left( \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{dx_2}{dt} + \theta_2 x_2 \right) \right) = -\frac{dx_2}{dt} - \theta_2 x_2,$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + (\theta_2 + \theta_1) \frac{dx_2}{dt} + \theta_1 \theta_2 x_2 = 0.$$

Получено однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найдем корни характеристического уравнения и запишем общее решение:  $\lambda^2 + (\theta_1 + \theta_2)\lambda + \theta_1 \theta_2 = 0; \lambda_1 = -\theta_1, \lambda_2 = -\theta_2; x_2(t) = C_1 e^{-\theta_1 t} + C_2 e^{-\theta_2 t}$ .

Затем найдем  $x_2'(t) = -\theta_1 C_1 e^{-\theta_1 t} - \theta_2 C_2 e^{-\theta_2 t}$  и подставим два последних равенства в уравнение  $x_1 = \frac{1}{\theta_1} \left( \frac{dx_2}{dt} + \theta_2 x_2 \right)$ :

$$x_1(t) = -\frac{1}{\theta_1} \left( -\theta_1 C_1 e^{-\theta_1 t} - \theta_2 C_2 e^{-\theta_2 t} + \theta_2 (C_1 e^{-\theta_1 t} + C_2 e^{-\theta_2 t}) \right) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} C_1 e^{-\theta_1 t}.$$

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ :

$$x_1(0) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} C_1 = 1, \quad x_2(0) = C_1 + C_2 = 0. \quad \text{Отсюда } \tilde{N}_1 = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}, \quad C_2 = -\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2}.$$

В результате получим:  $x_1(t) = e^{-\theta_1 t}, \quad x_2(t) = -\frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} (e^{-\theta_1 t} - e^{-\theta_2 t})$ .

Вычислим градиент целевой функции  $E(\theta)$ , который применяется в градиентных методах оптимизации из разд. 2:

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{10} \left[ \left( \hat{x}_1(t_j) - e^{-\theta_1 t_j} \right)^2 + \left( \hat{x}_2(t_j) + \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} (e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j}) \right)^2 \right].$$

В данном случае градиент целевой функции имеет вид:  $\nabla_{\theta} E(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}$ ,



$$\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_1} = \sum_{j=1}^{10} \left[ 2 \left( \frac{e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j}}{\theta_1 - \theta_2} - \frac{\theta_1 (e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j})}{(\theta_1 - \theta_2)^2} - \frac{\theta_1 t_j e^{-\theta_1 t_j}}{\theta_1 - \theta_2} \right) \times \right.$$

где

$$\times \left( \frac{\theta_1 (e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j})}{\theta_1 - \theta_2} + \hat{x}_2 \right) + 2 t_j e^{-\theta_1 t_j} (\hat{x}_1 - e^{-\theta_1 t_j}) \Bigg],$$

$$\frac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_2} = \sum_{j=1}^{10} \left[ 2 \left( \frac{\theta_1 (e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j})}{(\theta_1 - \theta_2)^2} + \frac{\theta_1 t_j e^{-\theta_2 t_j}}{\theta_1 - \theta_2} \right) \cdot \left( \frac{\theta_1 (e^{-\theta_1 t_j} - e^{-\theta_2 t_j})}{\theta_1 - \theta_2} + \hat{x}_2 \right) \right].$$

На рис. 1 приведены результаты решения примера (изменение целевой функции с ростом числа итераций) при разных значениях параметров методов. Видно, что все описанные методы сходятся к наилучшему ответу, но скорость сходимости разная. Результаты решения примера позволяют определить наиболее эффективный метод при заданном шаге и одинаковом количестве итераций: метод Adam быстрее всех сходится при наименьшем шаге, равном 0,2.

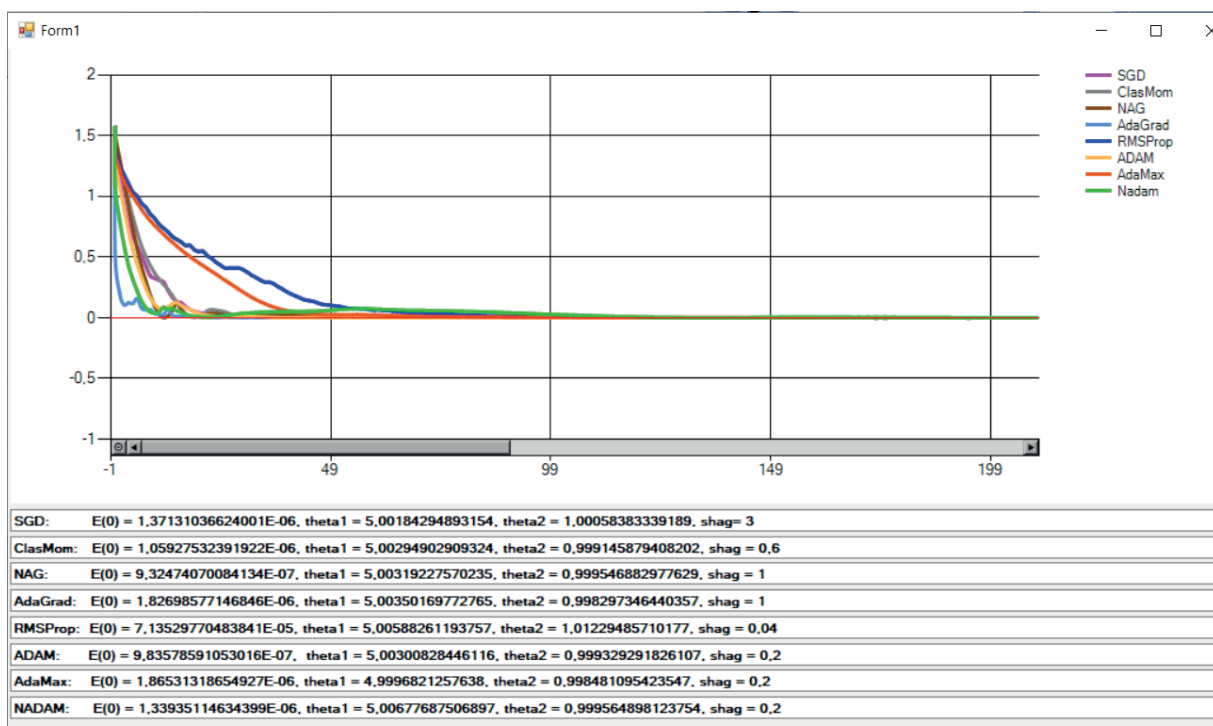


Рис. 1 а. Результаты применения градиентных методов

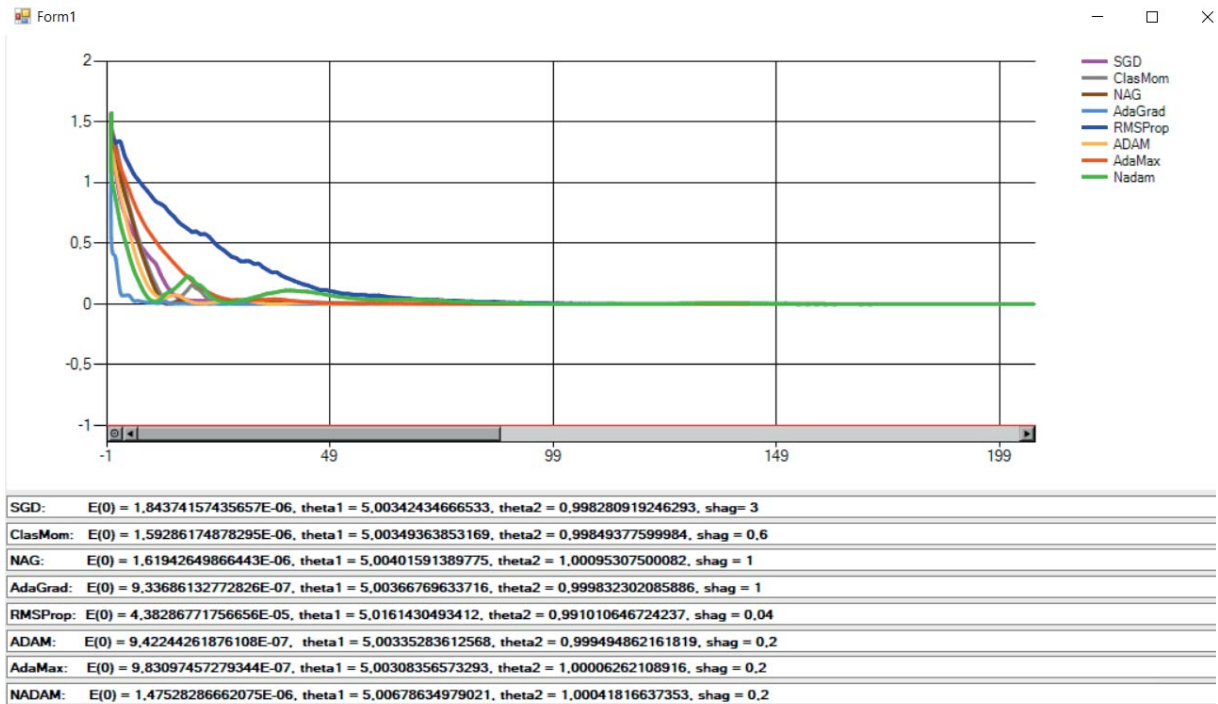


Рис. 1 б. Результаты применения градиентных методов

## Заключение

Сформированы алгоритмы решения задачи оценивания параметров динамических систем с применением градиентных методов оптимизации в машинном обучении: SGD, Classical Momentum, NAG, AdaGrad, RMSProp, Adam, Adamax, Nadam. Решен модельный пример оценивания параметров химической системы: модели протекания необратимой реакции первого порядка. Проведен сравнительный анализ эффективности алгоритмов оптимизации.

### Литература

1. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику.– М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 352 с.
2. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие/ А.В.Пантелеев, Т.А.Летова.– М.: Логос, 2011.
3. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации.– М.: Вузовская книга, 2019.
4. Пантелеев А.В., Крючков А.Ю. Метаэвристические методы оптимизации в задачах оценки параметров динамических систем // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2017. 20. № 2. С. 37–45.
5. Ruder S. An Overview of Gradient Descent Optimization Algorithms arXiv:1609.04747v2 [cs.LG] 15 Jun 2017.
6. Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjimann C.S., Esposito W.R., Gumus Z.H., Harding S.T., Schweiger C.A. Handbook of test problems in local and global optimization, 1999. Vol. 67. Springer US. 442 p. <https://titan.princeton.edu/TestProblems/>
7. Tjoa I.-B., Biegler L.T. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential–algebraic equation systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1991, Vol. 30, No. 2, pp. 376–385. <https://doi.org/10.1021/ie00050a015>



# Gradient optimization methods in machine learning for the identification of dynamic systems parameters

***Panteleev A. V.\****

Moscow Aviation Institute

(National Research University), Moscow, Russia

avpanteleev@inbox.ru

***Lobanov A. V.\*\****

Moscow Aviation Institute

(National Research University), Moscow, Russia

lobbsasha@mail.ru

The article considers one of the possible ways to solve the problem of estimating the unknown parameters of dynamic models described by differential-algebraic equations. Parameters are estimated based on the results of observations of the behavior of the mathematical model. Their values are found as a result of minimizing the criterion that describes the total quadratic deviation of the state vector coordinates from the exact values obtained at measurements at different points in time. The parallelepiped type constraints are imposed on the parameter values. To solve the optimization problem, it is proposed to use gradient optimization methods used in machine learning procedures: the stochastic gradient descent method, the classical moment method, the Nesterov accelerated gradient method, the adaptive gradient method, root mean square propagation method, the adaptive moment estimation method, the adaptive estimation method modification, Nesterov–accelerated adaptive moment estimation method. An example of identification of the parameters of a linear mathematical model describing a change in the characteristics of a chemical process is shown, which demonstrates the comparative effectiveness of the optimization methods of the selected group. The methods used to search for an extremum do not guarantee finding a result – a global extremum, but allow you to get a solution of good enough quality for an acceptable time. The results of calculations by all the listed optimization methods are presented. Recommendations on the selection of method parameters are given. The obtained numerical results demonstrated the effectiveness of the proposed approach. The found approximate values of the estimated parameters slightly differ from the best known solutions obtained by other methods.

## **For citation:**

Panteleev A.V., Lobanov A.V. Gradient optimization methods in machine learning for the identification of dynamic systems parameters. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 88–99. doi: 10.17759/mda.2019090407 (In Russ., abstr. in Engl.)

***\*Panteleev Andrei Vladimirovich***, Doctor of Physico-mathematical sciences, Professor, Head of Department of Mathematics and Cybernetics of the Faculty of Information Technology and Applied Mathematics of Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, E-mail: avpanteleev@inbox.ru

***\*\*Lobanov Aleksandr Vladimirovich***, Master's Degree student of the Faculty of Information Technology and Applied Mathematics of Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, E-mail: lobbsasha@mail.ru



**Keywords:** conditional optimization, machine learning, gradient methods of machine learning, parameter estimation.

### References

1. Ivchenko G.I., Medvedev Yu. I. Vvedenie v matematicheskuyu statistiku [Introduction to Mathematical Statistics]. Moscow: Publ. Librocom, 2014.
2. Panteleev A.V., Letova T.A. Metody optimizacii. Prakticheskij kurs [Optimization Methods. Practical Course]. Moscow: Logos, 2011.
3. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. Metahevristsicheskie algoritmy globalnoj optimizacii [Global optimization metaheuristic algorithms]. Moscow: Publ. Vuzovskaya kniga, 2019.
4. Panteleev A.V., Kryuchkov A. Yu. Metahevristsicheskie metody optimizacii v zadachah ocenki parametrov dinamiceskikh sistem [Metaheuristic optimization methods for parameters estimation of dynamic systems] // Civil Aviation High Technologies. 2017; 20(2): 37–45.
5. Ruder S. An Overview of Gradient Descent Optimization Algorithms arXiv:1609.04747v2 [cs.LG] 15 Jun 2017.
6. Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjimann C.S., Esposito W.R., Gumus Z.H., Harding S.T., Schweiger C.A. Handbook of test problems in local and global optimization, 1999. Vol. 67. Springer US. 442 p. <https://titan.princeton.edu/TestProblems/>
7. Tjoa I.-B., Biegler L.T. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential–algebraic equation systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 1991, Vol. 30, No. 2, pp. 376–385. <https://doi.org/10.1021/ie00050a015>

## Мультиагентное моделирование в задачах формирования расписаний

**Сивакова Т.В.\***

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия  
РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия  
sivakova15@mail.ru

**Судаков В.А.\*\***

Московский авиационный институт, Москва, Россия  
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия  
sudakov@ws-dss.com

В статье исследуется применение мультиагентных технологий для решения оптимизационных задач. Показано, как мультиагентные системы позволяют работать с ограничениями в распределенной вычислительной среде. Формализована задача составления расписания. Разработано программное обеспечение и проведены вычислительные эксперименты, показавшие эффективность предложенного подхода.

**Ключевые слова:** мультиагентные системы, предпочтения агентов, оптимизация, распределенные системы.

### Введение

Рассмотрим проблему распределения множества задач на множество ресурсов (например, планирование лекций для аудиторий или пакета заданий для нескольких процессоров). Это распространенная и важная проблема, которую можно формализовать, используя мультиагентный подход.

#### Для цитаты:

Сивакова Т.В., Судаков В.А. Мультиагентное моделирование в задачах формирования расписаний // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 100–111. doi: 10.17759/mda.2019090408

**\*Сивакова Татьяна Владимировна**, научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН), научный сотрудник, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова (РЭУ им. Г.В. Плеханова), Москва, Россия. E-mail: sivakova15@mail.ru

**\*\*Судаков Владимир Анатольевич**, доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В.Келдыша РАН), Москва, Россия. E-mail: sudakov@ws-dss.com



Обработку ограничений можно рассматривать как широкую и разнообразную область исследований, объединяющую методы и алгоритмы, которые охватывают многие различные дисциплины, включая исследование операций, компьютерное зрение, искусственный интеллект и теорию принятия решений. Все эти области имеют дело со сложными проблемами, которые можно сделать более понятными, тщательно продумав ограничения, определяющие структуру проблемы.

В данной статье показано, как обработка ограничений может использоваться для решения проблем оптимизации в мультиагентных системах (MAS – multi-agent system). Рассматриваются распределенные подходы к задачам оптимизации с ограничениями (DCOP – distributed constraint optimization). В DCOP набор агентов должен прийти к какому-то соглашению (обычно через какую-то форму переговоров), о том, какие действия должен предпринять каждый агент, чтобы совместно получить наилучшее решение для всей системы [1]. Эта структура успешно используется не только для планирования собраний, но и в сенсорных сетях, где датчики должны договориться о том, на какую цель они должны ориентироваться, чтобы получить наиболее точную оценку местоположения целей. Для тестирования эффективности алгоритмов решения DCOP, часто используют задачи проверки выполнимости булевых функций и раскраски графов. Общим ключевым аспектом DCOP для MAS является то, что каждый агент ведет локальные переговоры только с подмножеством других агентов (обычно называемых соседями), которые могут непосредственно влиять на его поведение. В зависимости от постановки задачи и используемой методики решения этот аспект может значительно сократить вычислительные усилия, с которыми сталкивается каждый агент, что делает сложные проблемы доступными даже для крупномасштабных систем. Так в задаче планирования собраний, агент будет напрямую вести переговоры только с теми агентами, с которыми он должен встретиться, что обычно составляет небольшое подмножество агентов, вовлеченных во всю проблему.

Наряду с мультиагентными подходами, сейчас активно развиваются метаэвристические методы оптимизации, которые хотя и не гарантируют нахождения точного решения, но обычно позволяют найти приемлемое решение за приемлемое время [2].

Возможная формализация DCOP для задачи планирования собрания включает набор агентов, представляющих людей, участвующих в собрании, и набор переменных, которые представляют возможное время начала данного собрания в соответствии с участником. Ограничения предписывают равенство переменным, представляющим время начала одного и того же собрания разных агентов, и гарантируют, что переменные, которые представляют время начала разных встреч одного и того же агента не совпадают. Наконец, предпочтения могут быть представлены как мягкие ограничения на время начала встреч, и общая цель состоит в том, чтобы оптимизировать сумму всех мягких ограничений. Хотя в этом параметре у нас есть личные предпочтения, мы максимизируем сумму предпочтений всех агентов, и, таким образом, рассматривается сценарий, когда агенты полностью сотрудничают, то есть они готовы уменьшить свою собственную локальную полезность, если это максимизирует глобальную полезность [3].

## Постановка задачи

В качестве конкретного примера применения DCOP рассмотрим задачу формирования расписания авиарейсов.



Введем обозначения:

$i = 1..n$  – номера типов летальных аппаратов (ЛА),

$v_i$  – вместимость ЛА,

$c_i$  – стоимость ЛА  $i$ -го типа,

$q_i$  – стоимость часа полета ЛА  $i$ -го типа,

$w_i$  – постоянные затраты на рейс ЛА  $i$ -го типа (независящие от продолжительности рейса),

$s_i$  – максимально возможное число ЛА  $i$ -го типа,

$j$  – номер аэропорта,

$A = \| \| a_{j_1 j_2} \| \|$  – объем перевозки (пассажиры в неделю),

$a_{jj} = 0$ ,

$j_1$  – аэропорт вылета,

$j_2$  – аэропорт прилета,

$$s_i = \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=j_1+1}^m \left\lceil \frac{\max(a_{j_1 j_2}, a_{j_2 j_1})}{7v_i} \right\rceil,$$

$K$  – максимально-возможное число ЛА, которые могут потребоваться для перевозки:

$$K = \sum_{i=1}^n s_i;$$

$k = 1..K$  – номера конкретных ЛА (они могут не все в дальнейшем потребоваться),

$i = f(k)$  – перевод индекса конкретного ЛА в индекс типа ЛА,

$D_k = \| \| d_{j_1 j_2}^k \| \|$  – средняя продолжительность рейса (в часах), зависит от типа ЛА (в общем случае матрица не симметричная),

$x_{lw}^k \in \{0, 1\}$  – оптимизационная переменная, равна единице, если самолет  $k$  совершает рейс  $l$  в день  $w$ ,

$l = 1..L$  – номер потенциального рейса (все номера рейсов могут быть не задействованы).

Это уникальный номер рейса в один день.

Номер рейса  $l$  связан взаимно-однозначным соответствием с кортежем  $(j_1, j_2, u_{j_1 j_2})$ . При этом следует брать только те пары  $j_1, j_2$  для которых требуются перевозки:  $a_{j_1 j_2} \neq 0$ .

Обозначим: отображение  $l \rightarrow j_1$  как функцию  $j_1 = g_1(l)$ , а отображение  $l \rightarrow j_2$  как функцию  $j_2 = g_2(l)$ ,

$w$  – номер дня (если составляем недельное расписание  $w = 1..7$ , но вместо 7 может быть и другое число),

$u_{j_1 j_2} = 1..U_{j_1 j_2}$  – это порядковый номер рейса для любого дня,

$U_{j_1 j_2}$  – максимальное кол-во рейсов, которые нам могут потребоваться за один день в данном направлении в наихудшем случае (недельный трафик за один день ЛА наименьшей вместимости):

$$U_{j_1 j_2} = \left\lceil \frac{a_{j_1 j_2}}{\min_i v_i} \right\rceil,$$

$L$  – максимальное число рейсов в день, которые возможно придется задействовать.

$$L = \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m U_{j_1 j_2},$$

$t_l$  – время вылета рейса. Оптимизационная переменная. Время считается с заданным шагом дискретизации на всем периоде планирования;



$\tau_l^k = t_l + d_{j_1 j_2}^k$  – время прилета,

$d_j$  – ограничение на пропускную способность ВПП аэропорта  $j$ . Используется в соответствующих ограничениях:

$$\forall k_1 \neq k_2 \quad \forall l_1 \neq l_2 \quad \forall w_1, w_2 \quad \forall j \left( (x_{l_1 w_1}^{k_1} = x_{l_2 w_2}^{k_2} = 1) \rightarrow \left( (g_1(l_1) = g_1(l_2) = j) \rightarrow |t_{l_1} - t_{l_2}| \geq d_j \right) \& \right. \\ \left. \left( (g_2(l_1) = g_1(l_2) = j) \rightarrow |\tau_{l_1}^k - t_{l_2}| \geq d_j \right) \& \left( (g_2(l_1) = g_2(l_2) = j) \rightarrow |\tau_{l_1}^{k_1} - \tau_{l_2}^{k_2}| \geq d_j \right) \right);$$

$p_j$  – пропускная способность аэропорта  $j$  пассажиров в сутки, позволяет записать ограничение:

$$\forall w \forall j \left( \sum_{l \in \{l: g_1(l)=j \vee g_2(l)=j\}} \sum_k v_{f(k)} x_{lw}^k \leq p_j \right).$$

Оптимизационная переменная:

$y_k$  – базовый аэропорт для  $k$ -го самолета,

$$\forall k \forall l \forall w \left( (x_{lw}^k = 1) \rightarrow \left( (g_2(l) = y_k) \vee P(k, l) \right) \& \left( (g_1(l) = y_k) \vee Q(k, l) \right) \right),$$

$$P(k, l) = \exists l_* \exists w \left[ \begin{array}{l} (x_{l_* w}^k = 1) \& (g_2(l) = g_1(l_*)) \& (\mu_k \leq t_{l_*} - \tau_l^k \leq \eta_{g_2(l)}) \& \\ \nexists l_0 (x_{l_0 w}^k = 1) \& (\tau_l^k \leq t_{l_0} \leq t_{l_*}) \end{array} \right];$$

$$Q(k, l) = \exists l_* \exists w \left[ \begin{array}{l} (x_{l_* w}^k = 1) \& (g_1(l) = g_2(l_*)) \& (\mu_k \leq t_l - \tau_{l_*}^k \leq \eta_{g_1(l)}) \& \nexists l_0 (x_{l_0 w}^k = 1) \& \\ (\tau_{l_*}^k \leq t_{l_0} \leq t_l) \end{array} \right].$$

Общий смысл данного ограничения – каждый ЛА летает по замкнутому маршруту и возвращается в свой базовый аэропорт. В рамках этого маршрута есть посадки, но кратковременные – на дозаправку и посадку и высадку пассажиров, в базовом аэропорте можно стоять сколько угодно;

$\mu_k$  – минимальное время, требуемое на подготовку ЛА данного типа к вылету,

$\eta_j$  – максимальное время, выделяемое в не базовом аэропорту для ЛА (размер слота).

Один рейс в один день выполняет только один ЛА:

$$\forall l \forall w \left[ \sum_k x_{lw}^k = 1 \right].$$

Нужно перевести всех (или почти всех) пассажиров:

$$\sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \max \left( 1000000 \left[ a_{j_1 j_2} - \sum_{l \in \{l: g_1(l)=j_1 \& g_2(l)=j_2\}} \sum_k \sum_w v_{f(k)} x_{lw}^k \right], 0 \right).$$

Требуется минимизировать парк ЛА:

$$\sum_k \tilde{n}_{f(k)} \operatorname{sgn} \left( \sum_w \sum_l x_{lw}^k \right)$$

и минимизировать затраты на конкретные перелеты:

$$\sum_k \sum_w \sum_l (q_{f(k)} d_{g_1(l)g_2(l)}^k + w_{f(k)}) x_{lw}^k.$$





Итоговая целевая функция:

$$\min_{\substack{x_{fw}^k, \\ t_l, \\ y_k}} \left\{ \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^m \max \left( 1000000 \left[ a_{j_1 j_2} - \sum_{l \in \{l: g_1(l)=j_1 \& g_2(l)=j_2\}} \sum_k \sum_w v_{f(k)} x_{fw}^k \right], 0 \right) + \right. \\ \left. \sum_k \tilde{n}_{f(k)} \operatorname{sgn} \left( \sum_w \sum_l x_{fw}^k \right) + \right. \\ \left. \sum_k \sum_w \sum_l \left( q_{f(k)} d_{g_1(l)g_2(l)}^k + w_{f(k)} \right) x_{fw}^k \right\}.$$

Эту проблему можно решить, и как классическую оптимизационную задачу. Однако подход DCOP обеспечивает масштабируемое решение, которое можно реализовать в большом вычислительном кластере, обеспечив, таким образом, существенный рост производительности.

## Определение сети ограничений

Ключевым элементом для распределенной обработки ограничений является концепция сети ограничений. Приведем стандартные формальные определения, относящиеся к сетям ограничений, а затем рассмотрим парадигму распределенной обработки ограничений.

Сеть ограничений  $N$  формально определяется как кортеж  $\langle X, D, C \rangle$ , где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – набор дискретных переменных,  $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  – это множество доменов переменных, которые перечисляют все возможные значения соответствующих переменных, а  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  представляет собой набор ограничений. Ограничение  $C_i$  может быть двух типов: жесткое или мягкое.

Жесткое ограничение  $C_i^h$  – это отношение  $R_i$ , определенное для подмножества переменных  $S_i \subseteq X$ . Переменные в  $S_i$  являются областью действия ограничения, а отношение  $R_i$  перечисляет все допустимые совместные комбинации значений переменных в области действия ограничения. Следовательно,  $R_i$  является подмножеством декартового произведения доменов переменных, которые находятся в пределах ограничения:  $R_i \subseteq D_{i_1} \times D_{i_2} \times \dots \times D_{i_r}$ , где  $r = |S_i|$  – это арность отношения. Мягкое ограничение  $C_i^s$  – это функция  $F_i$ , определенная для подмножества переменных  $S_i \subseteq X$ , которые составляют область определения функции. Каждая функция  $F_i$  отображает каждую комбинацию значений всех переменных в области видимости на вещественное значение, то есть  $F_i: D_{i_1} \times D_{i_2} \times \dots \times D_{i_r} \Rightarrow \mathbb{R}$ , где  $r = |S_i|$  арность функции.

Ограничения могут быть определены для любого подмножества переменных, однако наиболее наглядно работа в сетях ограничений (как алгоритмах решения, так и теоретическом анализе) показывается на бинарных сетях ограничений, где каждое ограничение (мягкое или жесткое) определяется двумя переменными.

Если набор ограничений включает только жесткие ограничения, то проблема называется проблемой удовлетворения ограничений (constraint satisfaction problem – CSP). В этом случае, ищутся значения для всех переменных в сети, которые удовлетворяют всем ограничениям. Значения переменных удовлетворяют ограничению, если кортеж значений переменных принадлежит отношению ограничения, если  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}) \in R_i$ , где  $a_j \in D_j$  и  $S_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\}$ , то такое назначение относится к решению для сети.



Если набор ограничений включает мягкие ограничения, то мы сталкиваемся с проблемой условной оптимизации (constraint optimization problem – COP) и наша цель – найти оптимальное решение. Это, такая комбинация значений всех переменных, которая удовлетворяет всем ограничениям, и которая максимизирует глобальную функцию  $F(\bar{a})$ . Глобальная функция  $F(\bar{a})$  является суммой функций, представляющих мягкие ограничения:  $F(\bar{a}) = \sum F_i(\bar{a}_i)$ , где  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_j \in D_j$ , и  $\bar{a}_i$  – это подмножество  $\bar{a}$  для  $S_i$ . COP – может быть задачей максимизации или минимизации. Без ограничения общности далее сосредоточимся на задачах максимизации, поэтому наша цель – найти такое  $\bar{a}^*$ , которое удовлетворяет всем жестким ограничениям и такое, что:

$$\bar{a}^* = \arg \max_{\bar{a}} \sum_i F_i(\bar{a}_i).$$

В целом, каждая задача CSP может также рассматриваться как задача COP, где мы стремимся найти назначение, которое нарушает наименьшее количество ограничений. Это особенно полезно для задач с большим количеством ограничений, где решение для CSP может не существовать. В частности, мы можем назначить постоянную фиксированную стоимость каждому нарушенному ограничению и искать назначение, которое минимизирует сумму затрат. Такая задача называется Max-CSP.

Можно реализовать жесткие ограничения с помощью мягких ограничений. Для этого вводится существенный штраф за комбинации значений переменных, которые не допустимы.

Например, предположим, без ограничения общности, что решается задача максимизации, и пусть  $R_i$  – отношение, соответствующее строгому ограничению  $C_i$ . Мы можем построить функцию  $F_i(\bar{a}_i) = -\infty$ , если  $\bar{a}_i \notin R_i$  и  $F_i(\bar{a}_i) = 0$ , в остальных случаях. Следует отметить, что это может привести к ухудшению процедуры поиска решения, так как явные жесткие ограничения могут быть использованы для сокращения пространства поиска решения [4].

## Метод решения

Распределенное решение предполагает использование набора агентов, которые контролируют переменные и взаимодействуют, чтобы найти решение для сети ограничений. Как было сказано выше, это могут быть задачи CSP или COP, которые решаются соответствующими распределенными методами: распределенный CSP (distributed CSP – DCSP) и распределенный COP (distributed COP – DCOP). Парадигма DCSP была первоначально предложена для решения проблем координации в среде с несколькими агентами [5], однако в последние годы платформе DCOP уделялось больше внимания, поскольку она имеет больше сценариев практического применения и CSP можно свести к COP.

DCOP представлен сетью  $N = \langle X, D, C \rangle$ , содержащей мягкие ограничения, плюс набор агентов  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ . Поиск оптимального решения DCOP – это NP-трудная проблема. Поэтому эмпирическая оценка методов решения DCOP является решающим моментом для оценки их возможного практического применения.

Учитывая предыдущее описание DCOP, рассмотрим точные методы решения, то есть те, которые всегда находят решение, которое соответствует наилучшему значению целевой функции (глобальный оптимум). Эти методы особенно интересны и изящны с теоретической точки зрения, но, поскольку мы имеем дело с проблемой NP-полноты, они также демонстрируют экспоненциально увеличивающиеся издержки координации (либо в размере, либо количестве сообщений, которыми обмениваются, либо в вычислениях, проводимых каждым агентом), количество агентов в системе увеличивается.



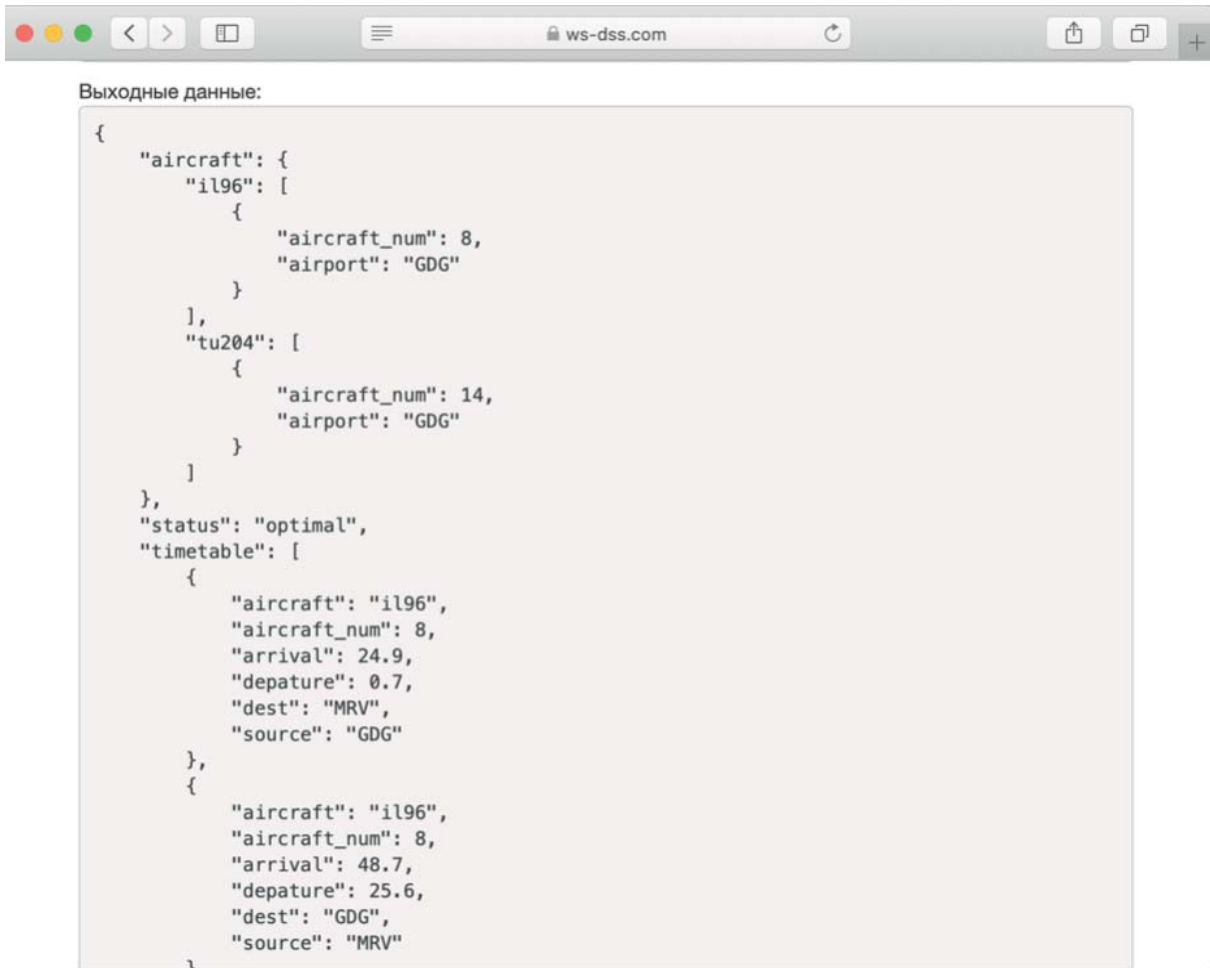
В целом, подходы можно разделить на два класса: те, которые основаны на поиске [6–10], и те, которые используют динамическое программирование [11]. Кроме того, подходы, основанные на поиске, делятся на синхронные, такие как SyncBB[10] и AND/OR поиск [9], и асинхронные, такие как ADOPT[6], NCBV[7] и AFB[8]. В модели синхронного выполнения агенты ждут сообщений от других агентов, прежде чем вычислить и отправить новые сообщения самим. Напротив, в асинхронной модели агенты выполняют вычисления и отправляют сообщения, не ожидая сообщений от своих соседей. Асинхронная операция желательна в мультиагентном подходе, поскольку она позволяет агентам принимать решения, не дожидаясь, пока другие агенты завершат свои вычисления, полностью используя параллельные вычисления. С другой стороны, синхронная модель гарантирует, что агенты всегда обладают самой актуальной информацией перед выполнением вычислений, таким образом, сводя к минимуму избыточность как в вычислениях, так и в коммуникации.

Все вышеперечисленные методы полностью децентрализованы, в том смысле, что каждый агент имеет полный контроль над своими переменными и знает только про релевантные ограничения. Тем не менее, централизация части проблемы иногда может уменьшить усилия, необходимые для поиска оптимального в глобальном масштабе решения. Данная концепция, лежит в основе подхода оптимального асинхронного частичного наложения (Optimal Asynchronous Partial Overlay – optAPO) [12]. Алгоритм optAPO стремится обнаружить части задачи, которые особенно трудно решить децентрализованным способом (части, которые сильно взаимосвязаны). Далее он объединяет их в подзадачи, которые делегируются агентам-посредникам, действующим как централизованные решатели. Практика показала, что optAPO последовательно снижает накладные расходы на коммуникации по сравнению с другими децентрализованными методами, такими как ADOPT. Однако очень трудно предугадать, какая часть задачи будет решаться централизованно, и, следовательно, трудно предсказать затраты вычислительных ресурсов, которые потратят агенты-посредники.

В работе проведены вычислительные эксперименты на децентрализованном подходе ADOPT. Для решения поставленной задачи использовался пакет ruDCOP – это решатель DCOP написанный на языке Python[13]. Он обладает следующими особенностями:

- предоставляет реализации многих классических алгоритмов DCOP;
- позволяет легко реализовать собственные алгоритмы DCOP, предоставляя всю необходимую инфраструктуру: агенты, систему обмена сообщениями, сбор метрик;
- упрощает проведение распределенных экспериментов, так как агенты могут работать на одном и том же компьютере или на разных ЭВМ;
- обеспечивает мультиплатформенность, так как может работать на Windows, Mac и Linux;
- подходит для использования в интернете вещей (IoT) и может запускать агенты на одноплатных компьютерах, таких как Raspberry Pi.

Поставленная задача формирования расписания была успешно решена на языке Python и размещена на портале веб-сервисов поддержки принятия решений ws-dss.com (см. рис. 1).



```
Выходные данные:
{
  "aircraft": {
    "il96": [
      {
        "aircraft_num": 8,
        "airport": "GDG"
      }
    ],
    "tu204": [
      {
        "aircraft_num": 14,
        "airport": "GDG"
      }
    ]
  },
  "status": "optimal",
  "timetable": [
    {
      "aircraft": "il96",
      "aircraft_num": 8,
      "arrival": 24.9,
      "depature": 0.7,
      "dest": "MRV",
      "source": "GDG"
    },
    {
      "aircraft": "il96",
      "aircraft_num": 8,
      "arrival": 48.7,
      "depature": 25.6,
      "dest": "GDG",
      "source": "MRV"
    }
  ]
}
```

Рис. 1. Решение задачи на ws-dss.com

Несколько работ основаны на ADOPT, пытаются сократить время вычислений. Например, в работе [14] предложен метод VnB-ADOPT, который является расширением ADOPT, он последовательно сокращает время вычислений, используя различные стратегии поиска: поиск в глубину и метод ветвей и границ. В работе [15] предложено использование методов предварительной обработки для поиска ADOPT и показано, что это может привести к существенному увеличению производительности.

## Заключение

ADOPT – эффективный мультиагентный метод, который работает в асинхронном режиме. Использование памяти каждым агентом является полиномиальным по количеству переменных, что является существенным преимуществом данного подхода по сравнению с динамическим программированием. Кроме того, все сообщения имеют фиксированный размер. Однако количество сообщений, которыми должны обмениваться агенты, в худшем случае экспоненциально по количеству переменных. Это влияет на время, необходимое для поиска оптимального решения. В частности, число циклов синхронизации сообщений определяется числом всех агентов, получивших входящие сообщения и отправивших исходящие сообщения, и является экспоненциальным. Такие экспоненциальные элементы неизбежны при поиске точного оптимального решения и могут серьезно ограничивать размерность решаемых задач.



MAS позволяет минимизировать количество информационных агентов, которые должны раскрывать информацию друг другу (таким образом, повышается уровень конфиденциальности). Это связано с тем, что в DCOP агентам необходимо знать только об ограничениях, в которые они вовлечены.

В целом, структура DCOP и алгоритмы, разрабатываемые для решения таких проблем, представляют собой активную область исследований в сообществе MAS, которая все чаще применяется в реальных условиях.

### **Финансирование**

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ проект № 18-00-00012 (18-00-00011) КОМФИ.

### **Литература**

1. *A. Farinelli, M. Vinyals, A. Rogers, and N. Jennings.* “Distributed Constraint Handling and Optimization”, in G. Weiss (ed.), “Multiagent Systems” (second edition), MIT Press, p. 547–584, 2013.
2. *Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А.* Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013. 244 с.
3. *Сивакова Т.В., Судаков В.А.* Метод нечетких областей предпочтения для оценки эффективности инноваций // XXVIII Международная научно-техническая конференция «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта, 14–20 сентября 2019 г. Сборник трудов. М.: Изд.-во Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2019. С. 81–82.
4. *R. Dechter.* Constraint Processing. Morgan Kaufmann, 2003.
5. *Makoto Yokoo.* Distributed constraint satisfaction: Foundations of cooperation in multi-agent systems. Springer-Verlag, 2001.
6. *P.J. Modi, W. Shen, M. Tambe, and M. Yokoo.* ADOPT: Asynchronous distributed constraint optimization with quality guarantees. Artificial Intelligence Journal, (161):149–180, 2005.
7. *A. Chechotka and K. Sycara.* No-commitment branch and bound search for distributed constraint optimization. In Proceedings of Fifth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, pages 1427–1429, 2006.
8. *Gershman, A. Meisels, and R. Zivan.* Asynchronous forward bounding for distributed COPs. Journal Artificial Intelligence Research, 34:61–88, 2009.
9. *R. Dechter and R. Mateescu.* And/or search spaces for graphical models. Artificial Intelligence, 171:73–106, 2007.
10. *Katsutoshi Hirayama and Makoto Yokoo.* Distributed partial constraint satisfaction problem. In Principles and Practice of Constraint Programming, pages 222–236, 1997.
11. *A. Petcu and B. Faltings.* DPOP: A scalable method for multiagent constraint optimization. In Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, pages 266–271, 2005.
12. *R. Maillerand, V. Lesser.* Solving distributed constraint optimization problems using cooperative mediation. In Proceedings of Third International Joint Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems, pages 438–445, 2004.
13. Library for research on Distributed Constraints Optimization Problems. URL: <https://github.com/Orange-OpenSource/pyDcop> (дата обращения: 26.10.2019)



14. *W. Yeoh, A. Felner, and S. Koenig.* BnB-ADOPT: An asynchronous branch-and- bound DCOP algorithm. In Proceedings of the Seventh International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, pages 591–598, 2008.
15. *S.M. Ali, S. Koenig, and M. Tambe.* Preprocessing techniques for accelerating the DCOP algorithm ADOPT. In Proceedings of the Fourth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, pages 1041–1048, 2005.



## Multi-Agent Modeling in Schedule Problems

**Sivakova T.V.\***

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia  
Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia  
sivakova15@mail.ru

**Sudakov V.A.\*\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia  
sudakov@ws-dss.com

The article explores the use of multi-agent technologies for solving optimization problems. It is shown how multi-agent systems allow working with restrictions in a distributed computing environment. The task of scheduling is formalized. Software was developed and computational experiments were carried out, which showed the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** multiagent systems, agent preferences, optimization, distributed systems.

### **Funding**

This work was supported by grant RFBR No 18–00–00012 (18–00–00011) KOMFI.

### **References**

1. A. Farinelli, M. Vinyals, A. Rogers, and N. Jennings. “Distributed Constraint Handling and Optimization”, in G. Weiss (ed.), “Multiagent Systems” (second edition), MIT Press, p. 547–584, 2013.
2. Pantelev A.V., Metlitskaya D.V., Aleshina E.A. *Metody global’noi optimizatsii. Metaevristicheskie strategii i algoritmy* [Global optimization methods, Metaheuristic strategies and algorithms]. Moscow, Vuzovskayakniga, 2013. 244 p. (in Russian)
3. Sivakova T.V., Sudakov V.A. *Metod nechetkih oblastej predpochtenii dlya ocenki effektivnosti innovacij* [Fuzzy preference method for evaluating innovation performance] // XXVIII Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferenciya «Sovremennye tekhnologii v zadachah upravleniya, avtomatiki i obrabotki informacii». Alushta, 14–20 sentyabrya 2019 g. Sbornik trudov. M.: Izd.-vo Nacional’nyj issledovatel’skij yadernyj universitet “MIFI”, 2019. 81–82. (in Russian)

### **For citation:**

Sivakova T.V., Sudakov V.A. Multi-Agent Modeling in Schedule Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 100–111. doi: 10.17759/mda.2019090408 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Sivakova Tatyana Vladimirovna**, Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), researcher, Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia. E-mail: sivakova15@mail.ru

\*\***Sudakov Vladimir Anatolievich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia. E-mail: sudakov@ws-dss.com



4. R. Dechter. *Constraint Processing*. Morgan Kaufmann, 2003.
5. Makoto Yokoo. *Distributed constraint satisfaction: Foundations of cooperation in multi-agent systems*. Springer-Verlag, 2001.
6. P.J. Modi, W. Shen, M. Tambe, and M. Yokoo. ADOPT: Asynchronous distributed constraint optimization with quality guarantees. *Artificial Intelligence Journal*, (161):149–180, 2005.
7. A. Chechotka and K. Sycara. No-commitment branch and bound search for distributed constraint optimization. In *Proceedings of Fifth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 1427–1429, 2006.
8. Gershman, A. Meisels, and R. Zivan. Asynchronous forward bounding for distributed COPs. *Journal Artificial Intelligence Research*, 34:61–88, 2009.
9. R. Dechter and R. Mateescu. And/or search spaces for graphical models. *Artificial Intelligence*, 171:73–106, 2007.
10. Katsutoshi Hirayama and Makoto Yokoo. Distributed partial constraint satisfaction problem. In *Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 222–236, 1997.
11. A. Petcu and B. Faltings. DPOP: A scalable method for multiagent constraint optimization. In *Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 266–271, 2005.
12. R.Maillerand, V.Lesser. Solving distributed constraint optimization problems using cooperative mediation. In *Proceedings of Third International Joint Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems*, pages 438–445, 2004.
13. Library for research on Distributed Constraints Optimization Problems. URL: <https://github.com/Orange-OpenSource/pyDcop> (26.10.2019)
14. W. Yeoh, A. Felner, and S. Koenig. BnB-ADOPT: An asynchronous branch-and-bound DCOP algorithm. In *Proceedings of the Seventh International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 591–598, 2008.
15. S.M. Ali, S. Koenig, and M. Tambe. Preprocessing techniques for accelerating the DCOP algorithm ADOPT. In *Proceedings of the Fourth International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 1041–1048, 2005.





УДК 004.942

## Компьютерная поддержка решений пилота на этапах взлета и посадки

**Мельничук А.В.\***

МАИ, Москва, Россия  
alexander.melnichyuk@gmail.com

**Судаков В.А.\*\***

МАИ, Москва, Россия,  
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия,  
sudakov@ws-dss.com

Предложено использование технологии экспертной системы в программном приложении для компьютерной поддержки решений пилота на этапах взлёта и посадки. Разработана модульная архитектура для процесса определения параметров взлета и посадки. На примере конкретного типа российского воздушного судна разработан прототип клиент-серверного программного приложения для электронного полётного планшета.

**Ключевые слова:** планшетный компьютер, воздушное судно, взлетно-посадочные характеристики.

### Введение

Несмотря на то, что взлет и посадка являются самыми короткими фазами полета, они являются наиболее сложными и критичными с точки зрения безопасности полетов. В то же время, расчет взлетно-посадочных характеристик воздушного судна имеет большое значение для обеспечения безопасности выполнения взлёта и посадки. Основной целью

#### Для цитаты:

Мельничук А.В., Судаков В.А. Компьютерная поддержка решений пилота на этапах взлета и посадки // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 112–120. doi: 10.17759/mda.2019090409

\***Мельничук Александр Владимирович**, аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет Москва, Россия. E-mail: alexander.melnichyuk@gmail.com  
\*\***Судаков Владимир Анатольевич**, доктор технических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), Москва, Россия. E-mail: sudakov@ws-dss.com



этих расчетов является определение максимально допустимой взлетной массы летательного аппарата, скоростей на взлёте ( $V_1$  – скорость принятия решения, т.е. максимальная скорость, до которой взлет может быть безопасно прекращен;  $V_R$  – скорость подъема передней стойки шасси;  $V_2$  – безопасная скорость взлета) и посадки ( $V_{REF}$  – скорость захода на посадку), максимальной посадочной массы самолета.

Зависимости взлётно-посадочных характеристик представлены в руководстве по лётной эксплуатации воздушного судна (РЛЭ) в виде номограмм, основанных на математической модели конкретной модификации самолета и скорректированных в соответствии с результатами летных испытаний.

Значения взлетно-посадочных характеристик зависят от многих эксплуатационных условий: фактической взлетной массы самолета, температуры наружного воздуха, давления, характеристик взлетно-посадочной полосы (заявленных длин, уклона, состояния ее поверхности), препятствий в районе аэродрома, скорости и направления ветра. Значительное влияние оказывают также управляющие действия пилота, регулирующего такие параметры самолета, как тяга двигателя, положение закрылков и др. Также в расчетах могут учитываться ограничения, обусловленные наличием отложенных дефектов и отклонений конфигурации самолета (согласно перечню MEL – Minimum Equipment List и CDL – Configuration Deviation List) или определяемые политикой эксплуатанта.

В настоящее время для расчета взлетно-посадочных характеристик широко используются специализированные программные приложения (такие как «Boeing Onboard Performance Tool» для самолетов производства корпорации Boeing и «FlySmart+» для самолетов Airbus). Эти приложения предназначены для использования в качестве программного обеспечения электронных полётных планшетов (EFB) на базе планшетных компьютеров.

Тем не менее, эти программные решения не позволяют эксплуатантам ВС использовать в определении взлётно-посадочных характеристик собственные правила в соответствии с их политикой.

В свою очередь, в настоящее время для самолётов российского производства аналогичных программных приложений нет. Пилоты российских самолетов определяют взлетно-посадочные характеристики вручную с помощью специальных номограмм или таблиц, представленных в РЛЭ. Выполнение расчетов указанным способом является длительным процессом, требующим повышенного внимания, а использование неверных результатов расчета может привести к авиационному происшествию или катастрофе.

Таким образом, разработка общих принципов построения специальной системы расчета взлётно-посадочных характеристик воздушных судов является актуальной научно-технической задачей [1–2].

Научная новизна исследования заключается в использовании технологии экспертных систем, обеспечивающей гибкость в определении взлетно-посадочных характеристик за счет возможности применения специальных ограничений в расчетных результатах в соответствии с правилами, основанными на MEL, CDL или политике эксплуатанта.

Для управления правилами в экспертной системе предлагается создание специального языка описания знаний. Такой подход позволит операторам с легкостью создавать правила и заполнять базу знаний экспертной системы без необходимости внесения изменений в программный код.

## Постановка задачи

Система расчета эксплуатационных характеристик летательных аппаратов должна соответствовать требованиям к программному обеспечению EFB, изложенным в инструктивном материале ИКАО Doc 10020 [3]. Опыт использования такого программного обеспечения для расчетов взлетно-посадочных характеристик самолетов иностранного производства указывает на ряд ошибок, связанных с вводом и интерпретацией данных. Поэтому для снижения риска ошибок необходимо учитывать принципы инструктивного материала ИКАО при проектировании графического пользовательского интерфейса системы.

Разрабатываемая система состоит из блоков, показанных на рисунке 1.

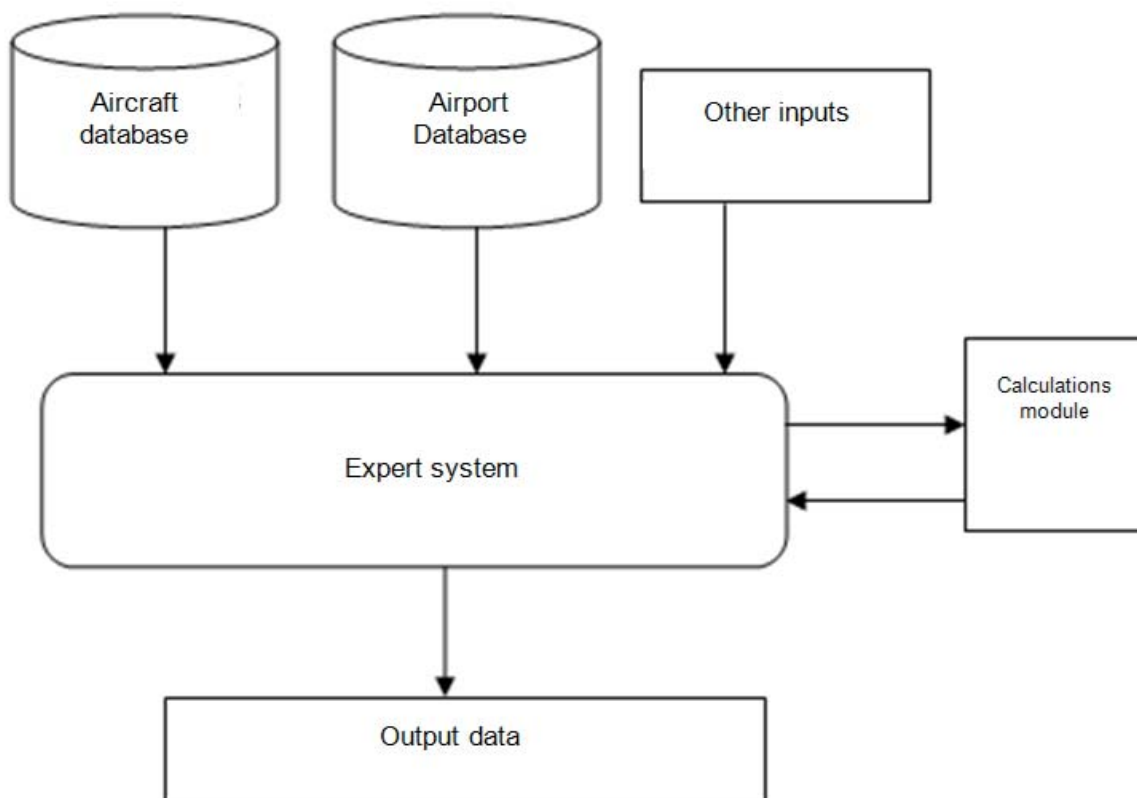


Рис. 1. Архитектура процесса расчета взлётно-посадочных характеристик.

Разделение системы на блоки необходимо для обеспечения ее гибкости и расширяемости, позволяющей учитывать специфику различных типов летательных аппаратов.

Заполнение расчетного модуля может осуществляться данными по заранее рассчитанным таблицам взлётно-посадочных характеристик для конкретного воздушного судна, либо по оцифрованным номограммам из РЛЭ.

Для заполнения базы данных аэродромов используются официальные источники аэронавигационной информации.

Фрагмент логической структуры базы данных аэродромов показан на рисунке 2. Таблица «AirportData» включает в себя кортежи кодов аэропортов ИКАО, названия аэропортов и их высоты. Таблица «RunwayData» включает в себя кортежи, связанные с характеристиками взлетно-посадочных полос: их идентификаторы, заявленные дистанции и значения уклонов. Таблица «ObstaclesData» включает в себя кортежи идентификаторов

препятствий, их типы, расстояние от торца взлетно-посадочной полосы, значения боковых смещений и высот.

Указанная база данных подвержена необходимости регулярных обновлений. Её актуальность, целостность, точность и качество имеют решающее значение в процессе вычислений взлётно-посадочных характеристик самолётов.

База знаний экспертной системы содержит правила, описывающие ограничения, определяемые эксплуатантом и влияющие на взлетно-посадочные характеристики.

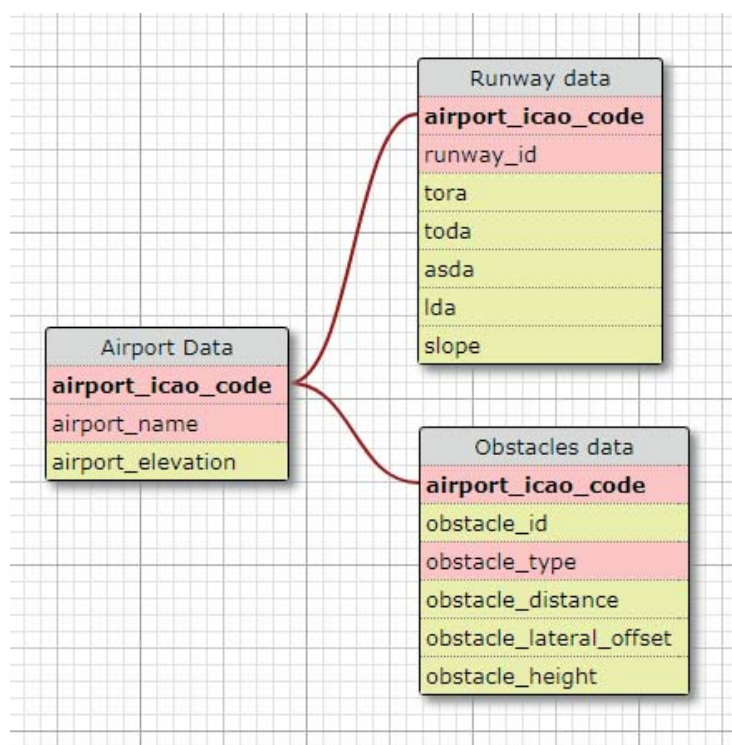


Рис. 2. Фрагмент структуры базы данных аэродромов.

## Задача выбора платформы efb

Согласно документу ICAODoc 10020 [3], оборудование EFB делится на 2 класса: портативное и установленное (т.е. являющееся частью конфигурации ВС). Аппаратным обеспечением EFB портативного класса является электронное устройство, представляющее собой планшетный компьютер.

Планшетные компьютеры стали широко использоваться в авиации в качестве портативных устройств EFB по причине их более низкой стоимости (по сравнению с установленными EFB), технология применения портативных EFB не ограничивается использованием только в кабине пилотов, это оборудование одобрено авиационными властями. В настоящее время на рынке представлено большое количество различных моделей планшетных компьютеров, которые могут быть использованы в качестве EFB. С развитием этого рынка и нормативно-правовой базы, регулирующей утверждение и использование планшетных компьютеров в авиации в качестве EFB, эксплуатанты воздушных судов сталкиваются с проблемой выбора наиболее рациональной модели устройства для них.

Задача выбора рациональной модели планшетного компьютера рассматривалась в работах [4] и [5].

С учетом существующего разнообразия электронных планшетов, а также для обеспечения работы программного обеспечения на отечественной элементной базе с целью минимизации зависимости от зарубежных производителей, основной целью является создание универсальной системы расчета летно-технических характеристик без привязки к конкретной аппаратной платформе.

Достижение поставленной цели возможно как путем адаптации программно-алгоритмического прототипа системы к существующим платформам (что является простой технической задачей), так и путем разработки с использованием универсальных систем программирования, переводящих код для соответствующих виртуальных машин, что обеспечивает возможность использования системы на всем многообразии существующих устройств, без необходимости разработки индивидуальной версии для каждого из них [6–8].

## Результаты

Поскольку первым этапом разработки программного приложения является задача создания программно-алгоритмического прототипа, выбор исходной аппаратной платформы и операционной системы не является критичным. Поэтому для упрощения тестирования разработанного прототипа и возможности быстрой адаптации к другим платформам за счет простоты синтаксиса языка, его разработка осуществляется в среде программирования Xcode с использованием языка Swift.

На рисунке 3 показан интерфейс прототипа программного обеспечения.

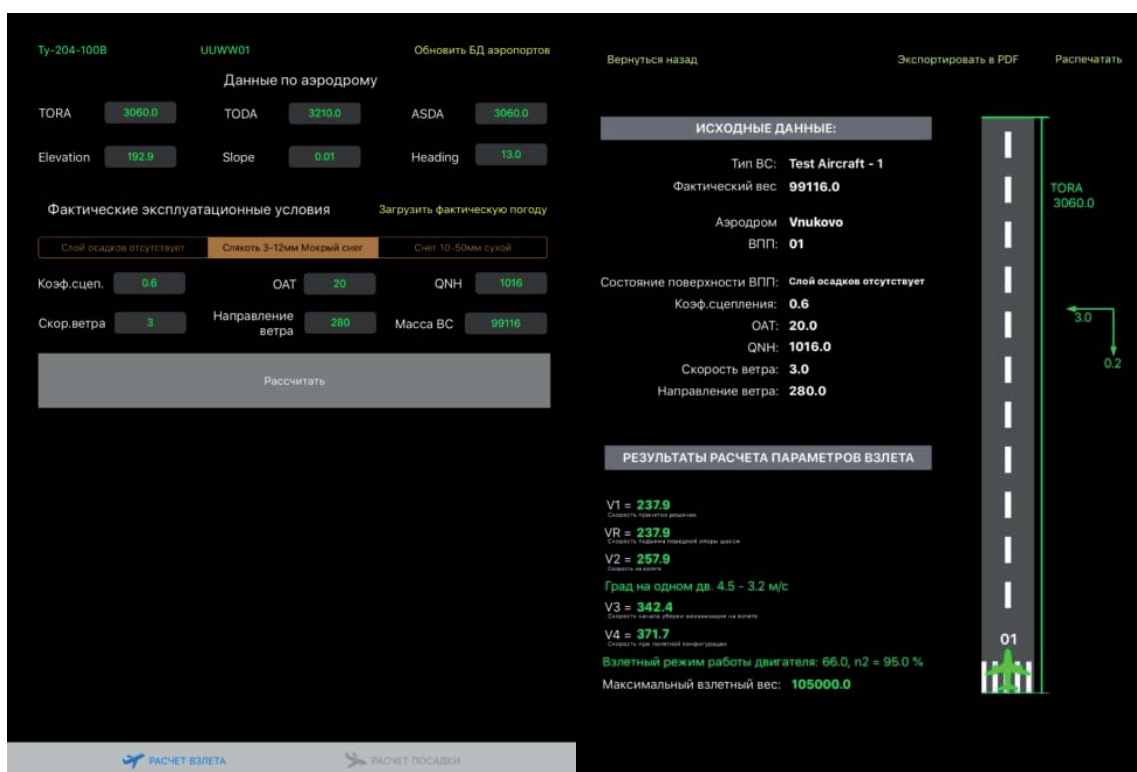


Рис. 3. Интерфейс прототипа программного приложения.

Для автоматизации расчетов были оцифрованы номограммы и построены их математические модели. Например, в соответствии с построенной математической моделью взлетная масса, ограниченная нормированным градиентом набора высоты, представлена в виде функции:



$$m_{TO} = f(T, H_{aer}),$$

где  $T$  – температура воздуха на аэродроме,  $H_{aer}$  – высота аэродрома, соответствующая фактическому барометрическому давлению на аэродроме.

В зависимости от значений, которые принимают параметры  $T$  и  $H_{aer}$ , взлетная масса, ограниченная набором высоты, может быть определена 12 различными способами. Например, если  $15 \leq T \leq 20$  и  $1800 \leq H_{aer} \leq 2000$ , то  $M_{TO}$  определяется в соответствии с формулой:

$$m_{TO} = (4-0,2T)[(118061-8,48485H_{aer}) - (119430-10,596H_{aer})] + (119430-10,596H_{aer}).$$

Для базы данных характеристик аэропортов используется информация из AIP (Aeronautical Information Publications, Сборник Аэронавигационной Информации). AIP издаётся государством или с его ведома и содержит необходимую для безопасного самолётовождения аэронавигационную информацию.

## Заключение

Использование технологии экспертных систем в разработанном программном обеспечении обеспечивает гибкость в определении взлетно-посадочных характеристик и упрощает процесс наполнения базы знаний правилами без необходимости внесения изменений в программный код.

Практическая польза предлагаемой системы заключается в повышении эффективности и безопасности эксплуатации парка российских воздушных судов и их конкурентоспособности за счет предоставления предлагаемого программного обеспечения в качестве сопутствующей услуги, совершенствующей технологию лётной эксплуатации.

### Финансирование

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ проект № 18-00-00012 (18-00-00011) КОМФИ.

### Литература

1. Мельничук А.В., Судаков В.А. Предпосылки создания системы автоматизированного расчёта взлетно-посадочных характеристик воздушного судна // Гагаринские чтения – 2016: XLII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: В 4 т. М.: Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 2016. – С. 428–429.
2. Мельничук А.В., Марценюк Е.А. Предпосылки создания ЭС для определения требуемых характеристик процесса взлета/посадки ВС в зависимости от погодных условий и конкретных параметров взлетно-посадочной полосы // 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2017»: Сборник тезисов докладов, Москва: Типография «Люксор», 2017. – С. 174–175.
3. ICAODoc 10020 «Руководство по электронным полетным планшетам (EFB)» – 2016 // [электронный ресурс] – Режим доступа – URL:<http://dspk.cs.gkovd.ru/library/viewitem.php?id=1082> (дата обращения 20.09.19).
4. Мельничук А.В., Марценюк Е.А. Предпосылки создания ЭС для выбора электронного планшета электронной информационной системы EFB для летного экипажа воздушного судна // Международная молодёжная научная конференция «XXXIII Туполевские чтения (школа молодых ученых)»: Материалы конференции. Сборник докладов, в 4 т. – Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. – Т.2. – С. 781–784.



5. Сыпало К.И., Нестеров В.А., Дутов А.В., Судаков В.А. Нечеткие области предпочтений и их применение в задаче выбора электронного планшета летчика // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 60–68.
6. Мельничук А.В., Нестеров В.А., Судаков В.А., Сыпало К.И. Разработка экспертной системы электронного планшета летчика (ЕФВ) для определения рациональных характеристик процессов взлета и посадки воздушных судов // 11-я международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2018): Труды конференции, в 3 т. – Москва: ИПУ РАН, 2018. – Т.2. – С. 310–316.
7. Мельничук А.В., Нестеров В.А., Судаков В.А., Сыпало К.И. Разработка приложения для определения рациональных характеристик процессов взлета и посадки воздушных судов с применением экспертной системы // Ежеквартальный научный журнал «Электронные информационные системы». – Москва: АО «НТЦ ЭЛИНС», 2019. № 1 (20). – С. 63–72.
8. Мельничук А.В., Нестеров В.А., Судаков В.А., Сыпало К.И. Разработка программного приложения планшетного компьютера для определения параметров взлета и посадки воздушных судов // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления. – С. 940–945.



# Decision Support for Pilot at Take-Off and Landing Stages

**Melnichyuk A.V.\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
alexander.melnichyuk@gmail.com

**Sudakov V.A.\*\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia  
sudakov@ws-dss.com

The use of expert system technology in a software application for decision support of pilot decisions at take-off and landing stages is proposed. Modular architecture has been developed for the process of determining take-off and landing parameters. Using a specific type of Russian aircraft as an example, a prototype client-server software application for an electronic flight tablet has been developed.

**Keywords:** tablet computer, aircraft, takeoff and landing characteristics.

## **Funding**

This work was supported by grant RFBR No 18–00–00012 (18–00–00011) KOMFI.

## **References**

1. Melnichyuk A.V., Sudakov V.A. Predposylki sozdaniya sistemy avtomatizirovannogo rashjota vzletno-posadochnyh harakteristik vozdušnogo sudna // Gagarinskie chteniya – 2016: XLII Mezhdunarodnaja molodjozhnaja nauchnaja konferencija: Sbornik tezisov dokladov: V 4 t. M.: Moskovskij aviacionnyj institut (Nacional’nyj issledovatel’skij universitet), 2016. – S.428–429.
2. Melnichyuk A.V., Marcenjuk E.A. Predposylki sozdaniya JeS dlja opredelenija trebuemyh harakteristik processa vzleta / posadki VS v zavisimosti ot pogodnyh uslovij i konkretnyh parametrov vzletno-posadochnoj polosy // 16-ja Mezhdunarodnaja konferencija «Aviacija i kosmonavtika – 2017»: Sbornik tezisov dokladov, Moskva: Tipografija «Ljuksor», 2017. – S. 174–175.
3. ICAO Doc 10020 «Rukovodstvo po jelektronnym poletnym planshetam (EFB)» – 2016 // [jelektronnyj resurs] – Rezhim dostupa – URL: <http://dspk.cs.gkovd.ru/library/viewitem.php?id=1082> (data obrashhenija 20.09.19).

## **For citation:**

Melnichyuk A.V., Sudakov V.A. Decision Support for Pilot at Take-Off and Landing Stages. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 112–120. doi: 10.17759/mda.2019090409 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Melnichyuk Alexander Vladimirovich**, graduate student, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: alexander.melnichyuk@gmail.com

\*\***Sudakov Vladimir Anatolievich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia. E-mail: sudakov@ws-dss.com





4. Melnichyuk A.V., Marcenjuk E.A. Predposylki sozdaniya JeS dlja vybora jelektronnogo plansheta jelektronnoj informacionnoj sistemy EFB dlja letnogo jekipazha vozdušnogo sudna // Mezhdunarodnaja molodezhnaja nauchnaja konferencija «XXXIII Tupolevskie chtenija (shkola molodyh uchenyh)»: Materialy konferencii. Sbornik dokladov, v 4 t. – Kazan': Izd-vo Akademii nauk RT, 2017. – T.2. – S. 781–784.
5. Sypalo K.I., Nesterov V.A., Dutov A.V., Sudakov V.A. Nechetkie oblasti predpochtении primeneniye v zadache vybora jelektronnogo plansheta letchika // Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Teorija i sistemy upravlenija. 2018. № 2. S. 60–68.
6. Melnichyuk A.V., Nesterov V.A., Sudakov V.A., Sypalo K.I. Razrabotka jekspertnoj sistemy jelektronnogo plansheta letchika (EFB) dlja opredelenija racional'nyh karakteristik processov vzleta i posadki vozdušnyh sudov // 11-ja mezhdunarodnoj konferencii «Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnyh sistem» (MLSD'2018): Trudy konferencii, v 3 t. – Moskva: IPU RAN, 2018. – T.2. – S. 310–316.
7. Melnichyuk A.V., Nesterov V.A., Sudakov V.A., Sypalo K.I. Razrabotka prilozhenija dlja opredelenija racional'nyh karakteristik processov vzleta i posadki vozdušnyh sudov s primeneniem jekspertnoj sistemy // Ezhekvartal'nyj nauchnyj zhurnal «Jelektronnye informacionnye sistemy». – Moskva: AO «NTC JeLINS», 2019. № 1 (20). S.63–72.
8. Melnichyuk A.V., Nesterov V.A., Sudakov V.A., Sypalo K.I. Razrabotka programmogo prilozhenija planshetnogo komp'jutera dlja opredelenija parametrov vzleta i posadki vozdušnyh sudov // Trudy XIII Vserossijskogo soveshhanija po problemam upravlenija. C. 940-945.

## Редактор графов на основе пакета Cytoscape

**Алексеев Н.С.\***

МАИ, Москва, Россия  
nikolay\_alekseev@hotmail.com

**Архипова М.М.\*\***

МАИ, Москва, Россия  
maria.arkhipova87102@gmail.com

Многие практические задачи естественным образом сводятся к понятию «граф». Поэтому актуальной является реализация удобных средств построения изображения графов. В статье описывается один из возможных способов решения этой проблемы в виде реализации веб-сервиса, основанного на одном из пакетов с открытым программным кодом.

**Ключевые слова:** граф, вершина, ребро, дуга, веб-технологии, пакет cytoscape.

### Введение

Теория графов является одной из самых востребованных для практического применения областей дискретной математики [1].

Важно различать понятия «граф» и «изображение графа».

Граф – это математический объект, состоящий из двух множеств: множество вершин и множество дуг или ребер, соединяющих вершины. Различают графы ориентированные и неориентированные, нагруженные и ненагруженные. Можно упомянуть и многие другие термины. Подчеркнем, что именно изображение графа позволяет многое воспринимать наглядно, и поэтому важно в процессе обучения.

Таким образом, задача создания (или нахождения) удобного инструмента для построения изображения графов различных типов является актуальной.

Безусловно существует немало инструментов, которые предназначены для решения подобных задач. Проблема, обычно состоит либо в сложности их «освоения», либо в их немалой стоимости.

В этой статье описывается программа, позволяющая создавать изображения графов, использующая пакет Cytoscape [2].

#### Для цитаты

Алексеев Н.С., Архипова М.М. Редактор графов на основе пакета Cytoscape // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 121–126. doi: 10.17759/mda.2019090410

\***Алексеев Николай Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. E-mail: nikolay\_alekseev@hotmail.com

\*\***Архипова Мария Михайловна**, студент бакалавриата Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. E-mail: maria.arkhipova87102@gmail.com

## Описание программы

В редакторе предусмотрены 3 режима:

1. добавления (удаления) вершин графа;
2. рисования ребер (дуг);
3. выделения элементов графа с целью их последующего перемещения и/или переименования.

В первом режиме (см. рис.1) нажатие левой кнопки мыши приводит к рисованию на месте клика вершины (элемента множества  $V$ ).

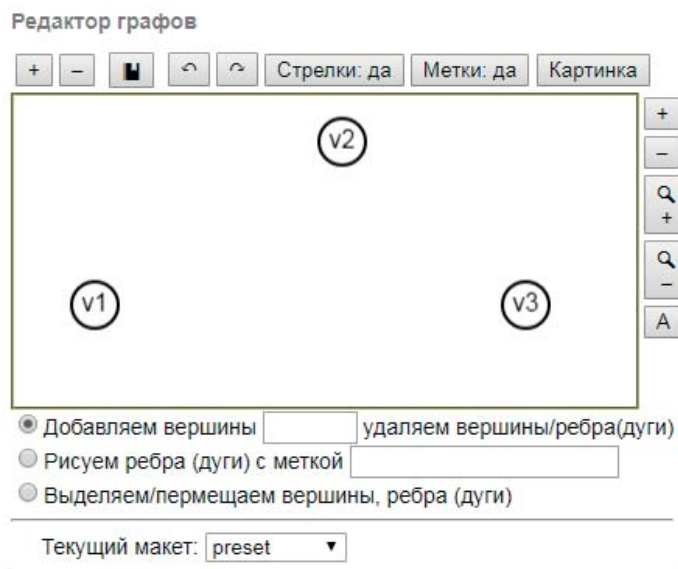


Рис. 1. Режим добавления вершин в граф.

Второй режим позволяет соединить вершины дугами или ребрами (см. рис.2). Для этого необходимо на исходной вершине нажать правую кнопку мыши и довести указатель мыши до конечной вершины. При реализации этой возможности был использован “трюк”, заключающийся в том, что исходная вершина при первом клике программно дублировалась, за счет чего обеспечивался эффект “Drag-and-drop” (перетаскивания вершины). При отжатииклавиши мыши вершины, являющиеся началом и концом дуги опять меняются местами, т.е. приходят в исходное положение

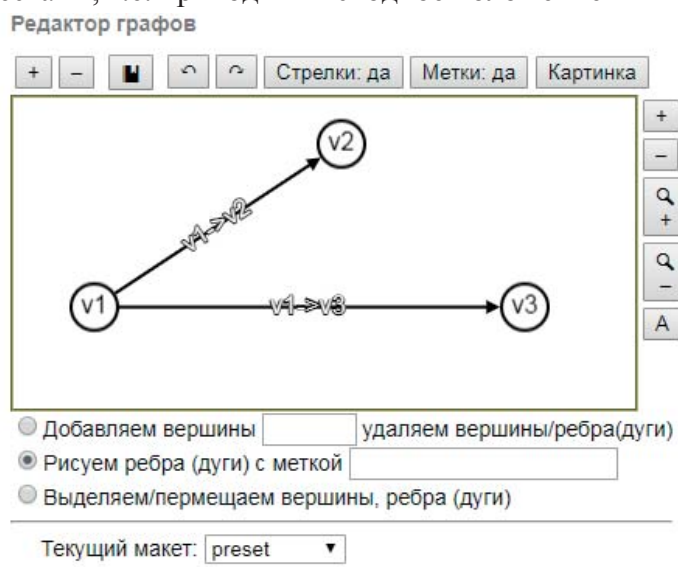


Рис. 2. Режим рисования ребер (дуг) графа.



Редактор позволяет изменить метки (названия) вершин и (или) ребер (дуг) на рис.3 представлен пример, где дуге, связывающей вершины v1 и v2 вместо метки, выставленной по умолчанию (“v1->v2”) поставлена метка 100.

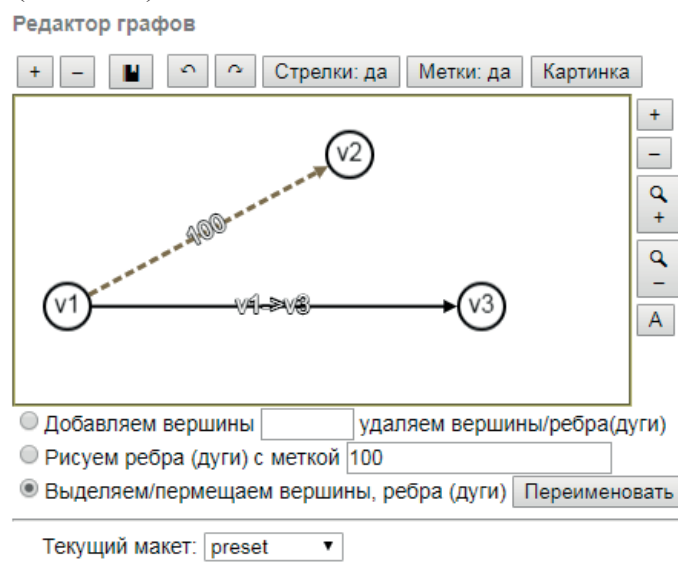


Рис. 3. Режим выделения элементов графа, позволяющий их переименование.

Кроме перечисленных трех режимов в редакторе предусмотрены элементы управления, реализованные в виде кнопок, расположенных выше поля для рисования и справа от него (рис. 4).



Рис. 4. Элементы графического интерфейса.

Кнопки, расположенные по горизонтали осуществляют следующие действия:

1. Увеличение и уменьшение площади рисунка по горизонтальному направлению;
2. Запоминание текущего изображения графа (максимум 15 изображений);
3. Переключение между состояниями;
4. Выбор вида графа (ориентированный или неориентированный граф);
5. Указание на то, является ли граф размеченным или нет;
6. Создание картинки и возможность сохранения ее в формате PNG.

Кнопки расположенные по вертикали осуществляют следующие действия:

7. Увеличение и уменьшение площади рисунка по вертикальному направлению;
8. Увеличение и уменьшение масштаба изображения;
9. Вывод на экран матрицы смежности, которая также является элементом управления. Функциональность этой кнопки проиллюстрирована на рис. 5. При нажатии на неё справа от поля рисования появляется матрица смежности. Нажав на соответствующую позицию матрицы смежности, возможно добавление или удаление соответствующего ребра или дуги. Таким образом рисование дуг графа можно осуществлять двумя способами: перетягиванием указателя мыши от вершины к вершине, либо, модификацией матрицы смежности путем нажатия на определенный ее элемент.

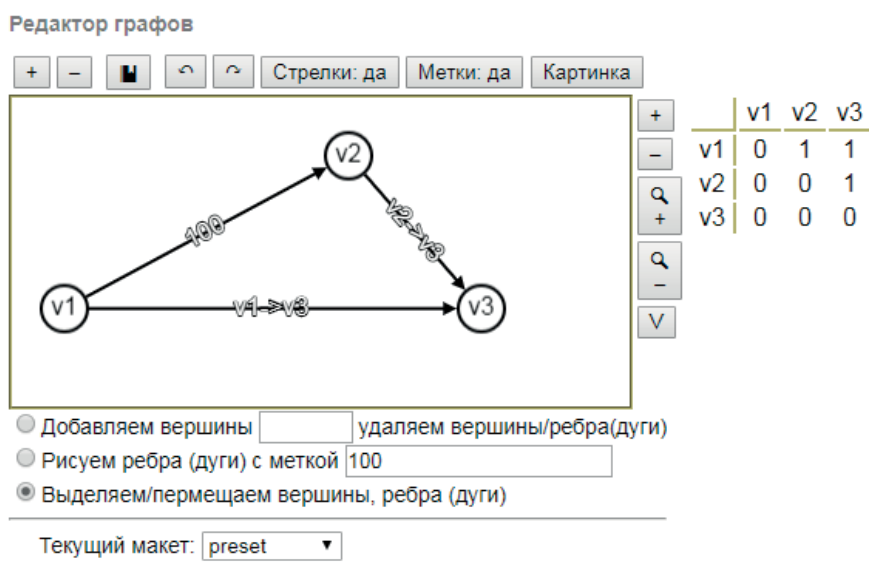


Рис. 5. Построение графа по матрице смежности.

Кнопка “картинка”, обозначенная на рис. 4 номером 6, предназначена для обеспечения основной функции программы, при ее нажатии справа появляется картинка, которую можно сохранить (см. рис. 6).

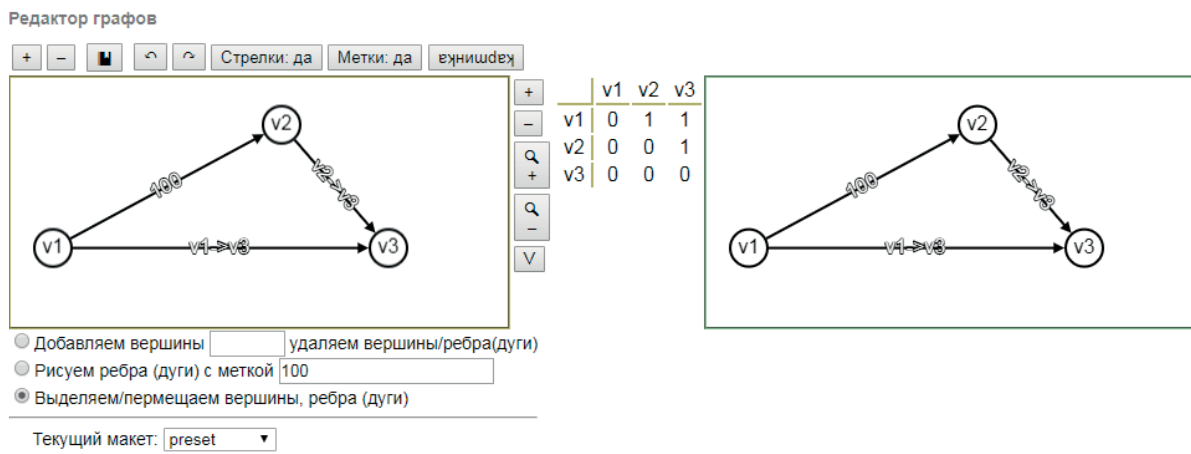


Рис. 6. Режим построения картинки.



## Заключение

В дальнейшем планируется включить описанный сервис в качестве дополнения гугл-таблицы и реализовать сохранение сформированных изображений не только в виде файла на диске компьютера, но и в виде текстовой строки в формате, предусмотренным пакетом cytoscape. Это позволит хранить значительный объем информации (изображений графов) в легко воспроизводимом виде и включить его в пакет, описанный в [3].

Другим направлением развития описанной программы является реализация различных алгоритмов, которые по построенному изображению графа позволят найти его характеристики, такие как, нахождение каркаса графа, нахождение кратчайших путей между вершинами графа, проверка связности, нахождение точек сочленения и т.д.

### *Литература*

1. Основы дискретной математики : учеб.пособие / В.А. Осипова. – 2-е изд., доп. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2017. – 157 с.
2. Электронный ресурс. Режим доступа: URL: <https://js.cytoscape.org/>
3. Труды международной научно-методической конференции «Информатизация инженерного образования». М.: Издательский дом МЭИ, 2018. с. 467–471.

## Graph editor based on Cytoscape package

***Alekseyev N.S.\****

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
nikolay\_alekseev@hotmail.com

***Arkhipova M.M.\*\****

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
maria.arkhipova87102@gmail.com

Many practical tasks naturally reduce to the concept of “graph”. Therefore, it is relevant to implement convenient means of constructing graph images. The article describes one of the possible ways to solve this problem in the form of implementing a web service based on one of the open source software packages.

**Keywords:** graph, vertex, edge, arc, web technologies, Cytoscape package.

### ***References:***

1. Osnovy diskretnoi matematiki : ucheb. posobie / V.A. Osipova. – 2-e izd., dop. – M.: FORUM: INFRA-M, 2017. – 157 s.
2. Ehlektronnyi resurs. Rezhim dostupa: URL: <https://js.cytoscape.org/>
3. Trudy mezhdunarodnoi nauchno-metodicheskoi konferentsii «Informatizatsiya inzhener-nogo obrazovaniYA». M.: Izdatel'skii dom MEHI, 2018. s. 467–471.

### **For citation:**

Alekseyev N.S., Arkhipova M.M. Graph editor based on Cytoscape package *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 121–126. doi: 10.17759/mda.2019090410 (In Russ., abstr. in Engl.)

\****Alekseyev Nikolay Sergeevich***, candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: [nikolay\\_alekseev@hotmail.com](mailto:nikolay_alekseev@hotmail.com)

\*\****Arkhipova Maria Mikhailovna***, undergraduate student, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia. E-mail: [maria.arkhipova87102@gmail.com](mailto:maria.arkhipova87102@gmail.com)



УДК 372.8, 517.972

## Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики

**Куланин Е.Д.\***

ФГБОУ ВО «МГППУ», Москва, Россия  
lucas03@mail.ru

**Нуркаева И.М.\*\***

ФГБОУ ВО «МГППУ», Москва, Россия  
nurkaevaim@yandex.ru

**Степанов М.Е.\*\*\***

ФГБОУ ВО «МГППУ», Москва, Россия  
mestepanov@yandex.ru

В данной статье рассматривается пропедевтика решения экстремальных задач. Как известно, подобные задачи играют важную роль в различных областях науки и техники. К ним зачастую сводятся многие проблемы, возникающие в экономике, промышленности и сельском хозяйстве. Как правило, решение этих задач требует применения достаточно сложного математического аппарата, изучаемого в высших учебных заведениях. Однако многие задачи на максимум и минимум могут быть решены элементарными средствами без использования высшей математики. Решение таких задач весьма полезно для учащихся в качестве пропедевтики соответствующей тематики.

**Ключевые слова:** Расстояние на плоскости, расстояние на искривлённой поверхности, геодезическая линия, линия уровня, эллипс, гипербола, градиент, экстремум, периметр, ортоцентрический треугольник, pedalный треугольник, правильный треугольник, изогональные прямые, изогональные точки, точка Торричелли.

**Для цитаты:**

Куланин Е.Д., Нуркаева И.М., Степанов М.Е. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 127–144. doi: 10.17759/mda.2019090411

\*Куланин Евгений Дмитриевич, к.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» Москва, Россия. E-mail: lucas03@mail.ru

\*\*Нуркаева Ирина Михайловна, к.п.н., доцент кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» Москва, Россия. E-mail: nurkaevaim@yandex.ru

\*\*\*Степанов Михаил Евграфович, к.п.н., доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» Москва, Россия. E-mail: mestepanov@yandex.ru





## Введение

Одной из насущных задач в преподавании вообще и в преподавании математики в частности является перевод образовательных программ на современные рельсы. При этом возникают весьма сложные проблемы, трудно поддающиеся решению. Дело в том, что если рассматривать цикл обучения в целом от начальной и до высшей школы, то начинать всегда приходится с нуля, а путь к современному знанию становится всё длиннее.

Это обстоятельство заставляет либо сохранять архаические во многих отношениях курсы, либо жертвовать развитием навыков, которые традиционно считались совершенно необходимыми. При этом, как показывает опыт, не удаётся добиться согласия по вопросу о том, что архаично, а что до сих пор актуально. Причина такого разнобоя во мнениях достаточно ясна. Спорящие стороны различным образом понимают цели образования. При этом одни хотят воспитать профессионального математика, другие – инженера, третьи – умного и образованного человека, четвёртые – идеального потребителя.

Авторы статьи полагают, что наиболее важным является воспитание умного и образованного человека. Как показывал в своих полемических статьях И.В. Арнольд, «крутая» модернизация нанесла ущерб, в том числе и сообществу профессионалов. Появились, в частности, математики, которые не умеют считать. При этом речь идёт не о сложных расчётах, а тех навыках, которые были доступны недавно едва ли не каждому школьнику младших классов.

Авторы данной статьи полагают, что одним из разумных путей модернизации математического образования является пропедевтика важных разделов высшей математики. При этом следует не просто выбрать тему и дать учащимся связанный с ней, но достаточно случайный набор заданий. Необходима кропотливая предварительная работа, направленная на отбор базовых понятий, задач и интуитивно воспринимаемых учащимися образов, о чём авторы писали в статье «Роль образного мышления в научном мышлении».

В данной же статье рассматривается пропедевтика решения экстремальных задач. Как известно, подобные задачи играют важную роль в различных областях науки и техники. К ним зачастую сводятся многие проблемы, возникающие в экономике, промышленности и сельском хозяйстве. Как правило, решение этих задач требует применения достаточно сложного математического аппарата, изучаемого в высших учебных заведениях. Однако многие задачи на максимум и минимум могут быть решены элементарными средствами без использования высшей математики. Решение таких задач весьма полезно для учащихся в качестве пропедевтики соответствующей тематики.

При изучении соответствующих вопросов авторы опираются на понятия, связанные с восприятием пространства, и интуитивно близкие учащимся. Речь идёт о следующем наборе понятий:

- Расстояние на плоскости.
- Расстояние на искривлённой поверхности.
- Геодезическая линия.
- Линия уровня.
- Градиент.
- Экстремум.
- Геометрическое преобразование, понимаемое, как формализация понятия движения.



## Расстояние на плоскости

Перейдём к изложению конкретных вопросов.

**Задача 1.** Рассмотрим для начала задачу о нахождении минимального пути из точки А в точку В с заходом на прямую l.

Более точная формулировка этой задачи выглядит следующим образом. Даны точки А и В, расположенные по одну сторону от прямой l (рис.1). Точка С лежит на прямой l. Требуется определить, при каком положении точки С на прямой l, сумма расстояний  $AC + CB$  будет минимальной.

Эта задача имеет также многочисленные формулировки практического содержания. Приведём одну из них.

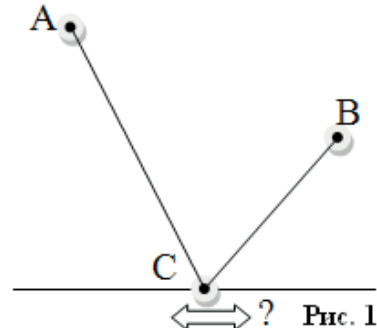


Рис. 1

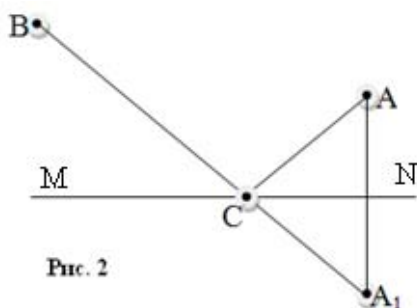


Рис. 2

Два посёлка А и В лежат на одном берегу реки l. Где надо построить водокачку С так чтобы общая длина  $AC + CB$  водопроводов в эти посёлки была минимальной?

Среди различных решений этой задачи самым простым является геометрическое. Пусть  $A_1$  – точка, симметричная точке А относительно прямой l, С – точка пересечения прямых  $A_1$  и l (рис. 2).

Покажем, что точка С является искомой. Действительно, пусть  $C_1$  – произвольная точка прямой l, отличная от точки С. Тогда, используя свойства симметрии относительно прямой l и применяя неравенство треугольника к треугольнику  $A_1C_1B$ , получим:

$$AC_1 + C_1B = A_1C_1 + C_1B > A_1B = A_1C + CB = AC + CB$$

или

$$AC_1 + C_1B > AC + CB,$$

то есть для любой точки  $C'$  прямой l, отличной от точки С, указанная сумма расстояний больше, чем сумма расстояний для точки С.

Оказывается, что кроме геометрического решения задачи есть и физическое её истолкование. Речь идёт о законах оптики, один из которых утверждает, что угол падения равен углу отражения. Это правило связано с тем, что свет идёт от точки к точке по кратчайшему пути. Итак, тот факт, что углы  $BCM$  и  $ACN$  равны, легко доказать геометрически и обосновать с помощью законов оптики, которые полезно применять при решении экстремальных задач.

Далее мы покажем, как простые факты, только что полученные нами можно применить для решения более сложных задач. Но для этого нам понадобится понятие линии уровня. Сначала определим линию уровня для некоторой величины. Множества точек, в которых некоторая величина, например, расстояние, принимает постоянное значение, называется линиями уровня этой величины.

## Концентрические окружности как пример линий уровня

Одна из важнейших геометрических фигур, – окружность, представляет собой множество точек равноудалённых от центра этой окружности. Таким образом, если мы рас-



смотрим точку  $O$  на плоскости и семейство концентрических окружностей с центром  $O$ , то каждая из окружностей семейства является линией уровня для расстояния от точки  $O$ .

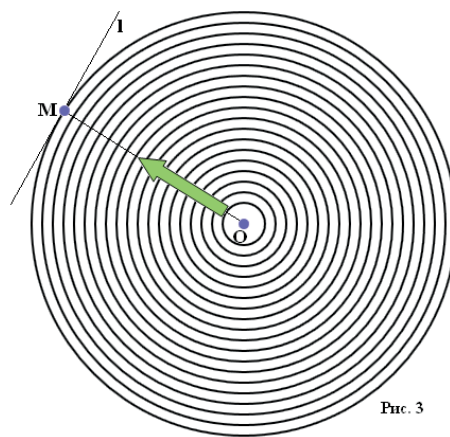
Переход от окружности к окружности большего радиуса можно трактовать как рост одной и той же окружности, то есть можно рассматривать фигуры семейства как фазы движения, например, как круг на глади воды.

Отвлекаясь на минуту от чисто математической тематики, но сохраняя связь с проблемами воспитания человека, отметим, что даже созерцание таких прекрасных линий как прямая и окружность является необходимым моментом полноценного развития. Тем более желательно, чтобы учащийся, развивая свою мелкую моторику, научился строить эти линии с помощью классических инструментов – линейки и циркуля. Естественно, это пожелание вызовет крайнее раздражение у приверженцев «чистой» математики, служащей только себе самой.

В этой связи процитируем известного французского математика Жана Дьедонне [1]: «... нужно научить ребёнка искусству геометрических построений, но при этом следует как чумы избегать этого воплощённого анекдота классического обучения – ограничения допустимого набора инструментов лишь циркулем и линейкой». Вопрос о том, чем строить, учёный муж оставляет открытым. Главное – не циркулем и линейкой.

Конечно, в процессе исторического изменения образования что-то безвозвратно теряется. Так авторы статьи с завистью смотрят на каллиграфические этюды А.С. Пушкина и Ф.М. Достоевского. А вот на то, как пишут современные молодые люди, воспитанные под эгидой неограниченной свободы, приходится взирать с содроганием. Хочется, чтобы хотя бы циркуль всё же сохранился.

Пусть прямая  $l$  не проходит через точку  $O$ . Тогда она удалена от этой точки на некоторое расстояние  $r$ . Это означает, что концентрические окружности нашего семейства, разрастаясь, сначала не будут пересекаться с прямой  $l$ . Но при достижении радиуса  $r$  соответствующая окружность соприкоснётся с этой прямой. Соприкосновение произойдёт в ближайшей к окружности точке  $M$ , лежащей на прямой  $l$ . При этом отрезок  $OM$  будет перпендикулярен прямой  $l$  (рис. 3).



## Определение градиента

Описанная нами простая динамическая модель должна послужить прообразом моделей более сложных. Если снова рассмотреть её с позиций геометрической оптики, то окружности, рассматриваемые до этого, как линии уровня, предстанут волновыми фронтами, а их радиусы – лучами, движущимися по кратчайшим расстояниям. По этой причине именно в направлении радиусов наиболее стремительно нарастает расстояние от центра, а, значит, радиусы являются линиями градиента, то есть направлениями наибольшего возрастания соответствующей величины. Линии градиента в каждой точке перпендикулярны линиям уровня.

Перейдём к более сложным процессам. При их описании мы будем говорить о линиях уровня не отдельных величин, а функций, зависящих сразу от нескольких величин. Мно-



жества точек, в которых функции двух переменных принимают постоянные значения, называются линиями уровня этих функций.

Рассмотрим линии уровня функции суммы расстояний  $AM + MB$ , где  $A$  и  $B$  – две различные фиксированные точки.

## Эллипсы

Эллипсом называется множество точек  $M$ , таких что для двух различных фиксированных точек  $A$  и  $B$  выполняется условие  $AM + MB = \text{const}$ . Точки  $A$  и  $B$  называются фокусами эллипса.

Оговоримся, что Если  $AM + MB < c$  и  $c < AB$ , то множество точек  $M$  пусто. Если  $AM + MB = c = AB$ , то множество точек  $M$  совпадает с отрезком  $AB$ . Если же  $AM + MB = c > AB$ , то множество точек  $M$  представляет собой полноценный невырожденный эллипс с фокусами  $A$  и  $B$ . Будем в дальнейшем эллипс, соответствующий сумме расстояний, равной  $c$ , обозначать через  $E_c$ .

Возможно простое и наглядное построение эллипса с помощью нити и двух гвоздиков (рис. 4). Возможно, к такой смене инструментов и призывал Дьедонне.

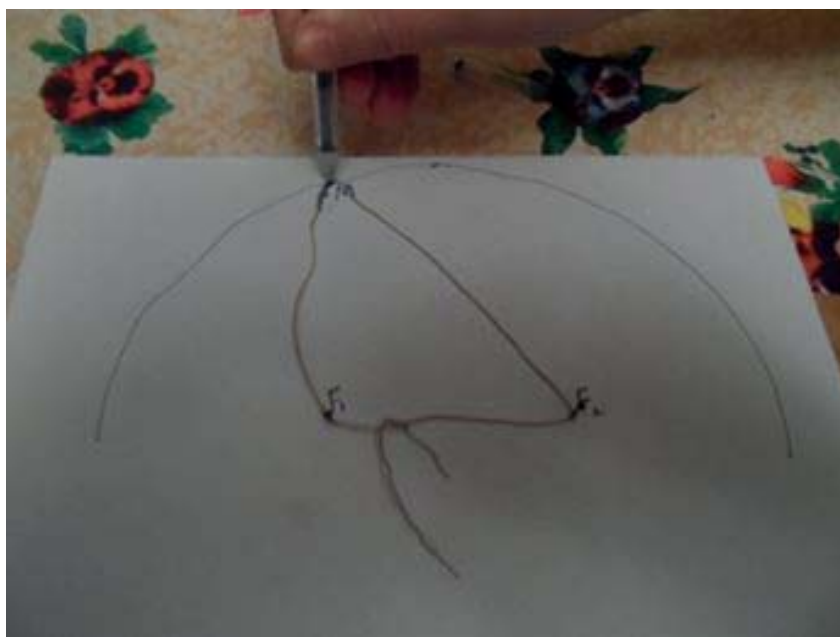


Рис. 4.

## Софокусные эллипсы как линии уровня

Если два эллипса имеют одинаковые фокусы, то они называются софокусными. Дадим описание семейства софокусных эллипсов, как «раздувающегося» семейства, схожего с семейством концентрических окружностей.

Изобразим на плоскости семейство софокусных эллипсов  $E_c$ , где  $AM + MB = c$ ,  $A$  и  $B$  – фокусы и  $c > AB$  (рис. 5). Очевидно, что если  $c_1 < c_2$ , то эллипс  $E_{c_1}$  лежит внутри эллипса  $E_{c_2}$ . Поэтому для внутренних точек  $M$  эллипса  $E_c$  выполняется неравенство  $AM + MB < c$ , для граничных точек  $M$  эллипса  $E_c$  справедливо равенство  $AM + MB = c$ , для внешних точек  $M$  эллипса  $E_c$  имеет место неравенство  $AM + MB > c$ .

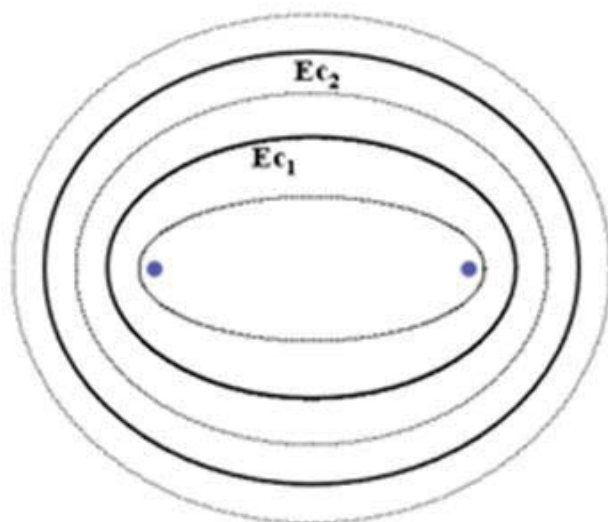


Рис. 5.

### Оптическое свойство эллипса

Если  $l$  – некоторая прямая, не пересекающая отрезок  $AB$ , то найдётся эллипс  $E_c$ , принадлежащий указанному семейству, касающийся прямой  $l$  в некоторой точке  $C$ . Тогда все точки  $C'$  прямой  $l$ , отличные от  $C$ , лежат вне эллипса  $E_c$  и, следовательно,  $AC + C'B > AC + CB$ , т.е. точка  $C$  даёт решение задачи, поставленной в начале этой статьи, и поэтому  $\angle ACK = \angle ACL$ . Таким образом, фокальные радиусы  $AC$  и  $BC$  эллипса  $E_c$  образуют равные углы с касательной  $l$  (рис. 6). Поскольку, как мы уже говорили, при отражении света от прямой  $l$  падающий и отражённый лучи образуют равные углы с этой прямой, то доказанное свойство называется оптическим свойством эллипса. Если считать эллипс зеркальным и поместить источник света в фокусе  $A$ , то отражённые лучи соберутся в фокусе  $B$  (рис. 7).

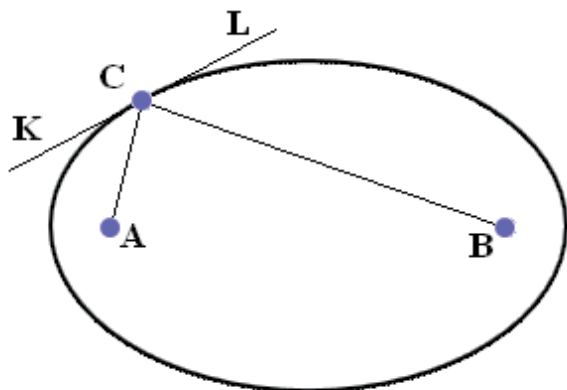


Рис. 6

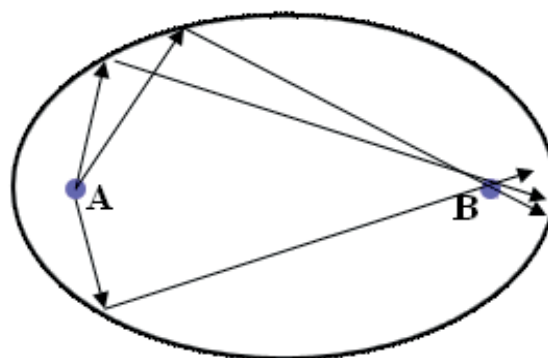


Рис. 7

### Точка Торричелли

Похожим способом можно решить следующую задачу.

Найти в плоскости треугольника  $ABC$  точку  $M$  такую, что сумма расстояний  $MA + MB + MC$  от этой точки до вершин треугольника  $ABC$  наименьшая.

Построим семейство софокусных эллипсов с фокусами  $A$  и  $C$  и семейство концентрических окружностей с центром в точке  $B$  (рис. 8). Ясно, что в точке минимума суммы



расстояний  $MA + MB + MC$  один из эллипсов первого семейства должен касаться некоторой окружности второго семейства, так как в случае пересечения эллипса и окружности, проходящих через точку  $M$ , для всех точек  $P$ , принадлежащих пересечению внутренней области эллипса и круга, сумма  $PA + PB + PC$  будет меньше суммы  $MA + MB + MC$ . Обозначим точку касания эллипса и окружности через  $T$ , а их общую касательную – через  $KL$ . Тогда  $\angle ATK = \angle CTL$  и  $\angle ATB = \angle CTB = \angle ATK + \angle KTB = \angle CTL + \angle LTB = \angle CTB$ , поскольку  $\angle KTB = \angle LTB = 90^\circ$  в силу перпендикулярности радиуса  $BT$  окружности касательной  $KL$ . Итак,  $\angle ATB = \angle CTB$ .

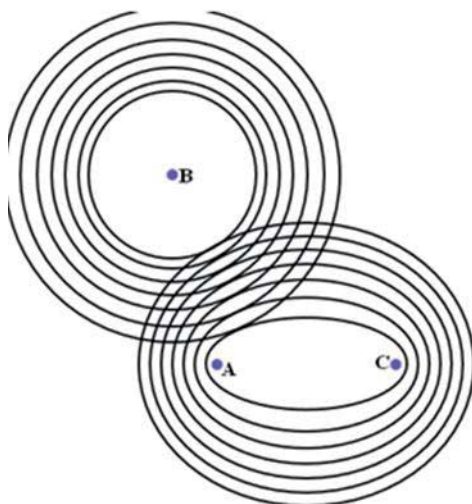


Рис. 8.

Проведя аналогичные рассуждения для семейства софокусных эллипсов с фокусами  $A$  и  $B$  и семейства концентрических окружностей с центром в точке  $C$ , получим, что  $\angle ATC = \angle CTB$ . Таким образом,  $\angle ATC = \angle CTB = \angle ATB = 120^\circ$ .

Точка  $T$  называется точкой Торричелли треугольника  $ABC$ . Для ее построения достаточно построить на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  правильные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  внешним образом, т. е. так, чтобы точки  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$  лежали по разные стороны от прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  и описать около треугольников окружности, которые пересекутся в точке  $T$  (рис. 9).

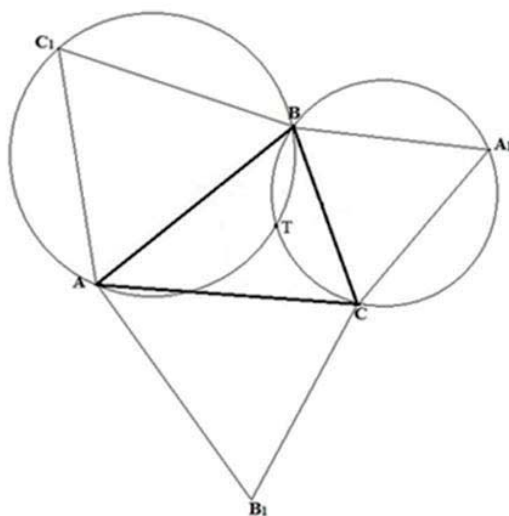


Рис. 9.



Действительно, пусть  $T$  – точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ABC_1$  и  $BCA_1$ . Тогда

$$\angle ATB = 1800 - \angle AC_1B = 1800 - 600 = 1200 = 1800 - \angle BA_1C = \angle CTV$$

и

$$\angle ATC = 3600 - \angle ATB - \angle CTV = 3600 - 1200 - 1200 = 1200,$$

т.е. описанная окружность треугольника  $CAB_1$  также проходит через точку Торричелли  $T$ . Итак, решение получено с помощью достаточно простых и ясных рассуждений.

Что касается вопроса о направлении линий градиента в случае, когда в качестве линий уровня рассматриваются софокусные эллипсы, то ими являются софокусные (с теми же фокусами) гиперболы. Элементарное доказательство этого факта дано в [2].

На данный момент мы можем подвести предварительный итог, состоящий в том, что, отправляясь от расстояния на плоскости можно рассмотреть ряд экстремальных задач, решение которых не только элементарно, но и опирается на интуитивно прозрачные пространственные образы. Перечислим решённые нами задачи.

- Поиск минимального пути с заходом на прямую.
- Рассмотрение семейств концентрических окружностей и софокусных эллипсов как линий уровня.
- Получение метода построения касательных к эллипсу.
- Вывод оптического свойства эллипса.
- Построение точки Торричелли.

Дальнейшее продвижение пропедевтики экстремальных задач можно связать с важным понятием геодезической линии. Рассмотрим какую-либо искривлённую поверхность. Движение по ней из точки  $A$  в точку  $B$  можно осуществить многими способами, но один из путей является кратчайшим. Именно эта кратчайшая линия на поверхности называется геодезической.

Изучение геодезических линий в общем случае проводится сложными методами дифференциальной геометрии. Однако существует два вида поверхностей, геодезические на которых могут быть описаны наглядными и элементарными методами.

Начнём с линейчатых развёртывающихся поверхностей. Такие поверхности являются частным случаем линейчатых поверхностей, которые образованы непрерывным движением прямой. При этом их можно без растяжений и сжатий развернуть и наложить на плоскость. При этом все геодезические перейдут в прямые [3].

Примерами развёртывающихся поверхностей являются конусы и цилиндры. Эти поверхности не только наглядно представимы, но и легко моделируются с помощью листа бумаги. Все рассмотренные выше задачи переносятся на развёртывающиеся поверхности.

Учащемуся, например, может быть предоставлено следующее задание, которое на первый взгляд имеет экспериментальный характер. Он получает свёрнутый из бумаги конус-кулёк с двумя помеченными точками. Нужно начертить на конусе геодезическую линию, соединяющую эти точки. Правильное решение таково. Нужно разрезать конус по образующей, развернуть на плоскость стола, провести прямую, через заданные точки и склеить конус заново.

Вторым типом поверхностей, позволяющим успешно работать с геодезическими, являются сферы. Как известно, геодезическими линиями на сфере являются линии большого круга [4]. При этом вычисления расстояний на сфере не составляет труда, поскольку



его можно измерять угловой мерой кратчайшей дуги большого круга, соединяющей эти точки. Кроме того, вся образная система, применяемая нами на плоскости, переносится на сферу, в частности это относится к задаче о нахождении минимального пути на сфере из точки  $A$  в точку  $B$  с заходом на геодезическую.

Более того, на любой поверхности могут быть введены аналоги кривых второго порядка, называемые геодезическими эллипсами и гиперболами [5]. При этом, как и на плоскости, геодезические эллипсы и гиперболы образуют ортогональную сеть. В полной мере это относится и к сфере. При указанном нами способе определения расстояний можно определить на сфере аналоги кривых второго порядка. Например, эллипс – множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна.

Чтобы подчеркнуть особую специфику возникающей при этом сферической геометрии, отметим, что любая линия большого круга на сфере одновременно является прямой (геодезической), окружностью, равноудалённой от каждого из двух полюсов, и сферическим эллипсом.

Очень интересен и тот факт, что любая сферическая гипербола с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  одновременно является сферическим эллипсом с фокусами  $P_1$  и  $F_2$ , где  $P_1$  является точкой, диаметрально противоположной фокусу  $F_1$ . Точно также и любая сферическая парабола одновременно является сферическим эллипсом. Доказательство этих фактов совершенно элементарно.

Для нас же особенно важно то, что при наличии таких отличий геометрии сферы от геометрии плоскости метод, предназначенный для построения касательных к эллипсам на сфере, без существенных изменений переносится и сюда. Он позволяет строить касательные к сферическим эллипсам как биссектрисы углов между фокальными радиусами. Таким образом, перед учащимся возникает круг экстремальных задач, связанных с новой геометрией, но решаемых схожими методами.

Теперь и на сфере мы рассматриваем геодезические эллипсы как линии уровня. Что же касается линий градиента, то их нахождение связано со следующей теоремой: если на сфере заданы две точки  $F_1$  и  $F_2$ , а точка  $F_3$  является диаметрально противоположной к точке  $F_1$ , то любой сферический эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  ортогонален любому сферическому эллипсу с фокусами  $F_2$  и  $F_3$  (рис. 10).

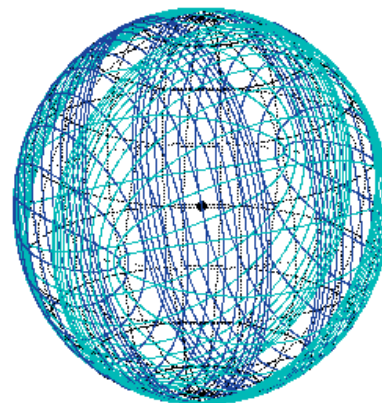


Рис. 10.

Итак, нами очерчен достаточно представительный круг экстремальных задач, решаемых простыми и наглядными методами.

## Две геометрические задачи на экстремум

В заключение рассмотрим ещё две геометрические задачи на экстремум. Для этого сначала напомним, что треугольник  $A_1B_1C_1$  называется вписанным в треугольник  $ABC$ , если его вершины лежат на сторонах треугольника  $ABC$ . Для определенности можно считать, точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат соответственно на сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  (рис. 11).



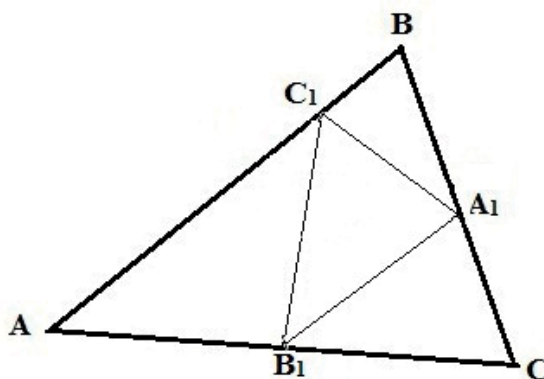


Рис. 11.

Задача 1. Среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник ABC, найти треугольник минимального периметра.

Задача 2. Среди всех правильных треугольников, вписанных в данный треугольник ABC, найти треугольник минимального периметра.

Несмотря на похожие формулировки, эти задачи значительно отличаются по степени известности. Если первая задача имеет давнюю историю и достаточно широко известна, то вторая задача известна гораздо меньше. По имеющимся у авторов сведениям, впервые она была поставлена российским геометром Д.П. Мавло в 1981г. [6], а её решение, принадлежащее тому же автору, было опубликовано в канадском математическом журнале *Czechoslovak Mathematical Journal* в 1982г. [7]. Мы приведём решение задачи 2, использующее аналогию с решением задачи 1, отличное от авторского Д.П. Мавло [7].

Отметим также, что частный случай данной задачи для египетского треугольника был недавно рассмотрен Б.Н.Кукушкиным [8].

Покажем сначала, что решением задачи 1 является ортоцентрический треугольник  $H_a H_b H_c$  остроугольного треугольника ABC, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC.

Хорошо известно, что треугольники  $AH_b H_c$ ,  $BH_c H_a$ ,  $CH_a H_b$  подобны треугольнику ABC (см, например, задачу 4.2 [9]). Пусть точка O – центр описанной окружности треугольника ABC (рис. 12), M – середина AB.

Тогда  $\angle MOB = 1/2 \angle AOB = \angle ACB$ , поскольку вписанный угол ACB равен половине центрального угла AOB, поэтому из прямоугольного треугольника OMB получаем  $\angle MBO = 90^\circ - \angle MOB = 90^\circ - \angle ACB = \angle H_b BC$ , т.е. радиус описанной окружности и высота, выходящие из одной вершины треугольника, образуют равные углы со сторонами треугольника, выходящими из той же вершины (на рис. 2 изображен остроугольный треугольник, общий случай рассмотрен в задаче 4.12 [9]). Далее,  $\angle BH_c H_a = \angle ACB$  в силу подобия треугольников  $H_a BH_c$  и ABC, откуда вытекает, что  $\angle BH_c H_a + \angle OBH_c = \angle ACB + \angle H_b BC = 90^\circ$ , т.е.  $\angle H_c O_b B = 90^\circ$ , где  $O_b$  – точка пересечения прямых OB и  $H_c H_a$ . Таким образом, радиус OB описанной окружности треугольника ABC перпендикулярен стороне  $H_a H_c$  ортоцентрического треугольника  $H_a H_b H_c$ . Аналогично,  $OA \perp H_b H_c$  и  $OC \perp H_a H_b$ .

Теперь легко выразить площадь треугольника ABC через радиус его описанной окружности R и периметр  $P_H$  его ортоцентрического треугольника  $H_a H_b H_c$ . Соединим центр O описанной окружности с основаниями высот  $H_a, H_b, H_c$  треугольника ABC (рис. 13).

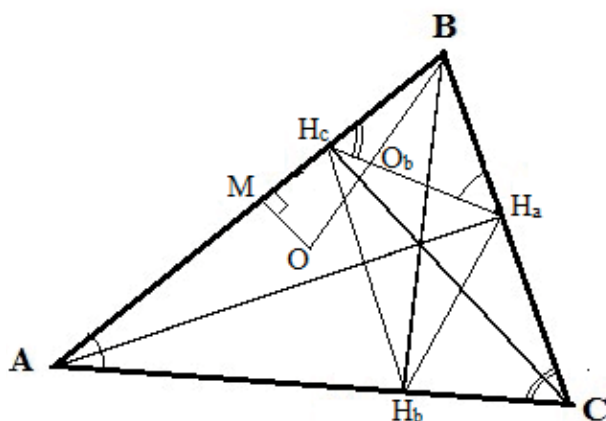


Рис. 12.

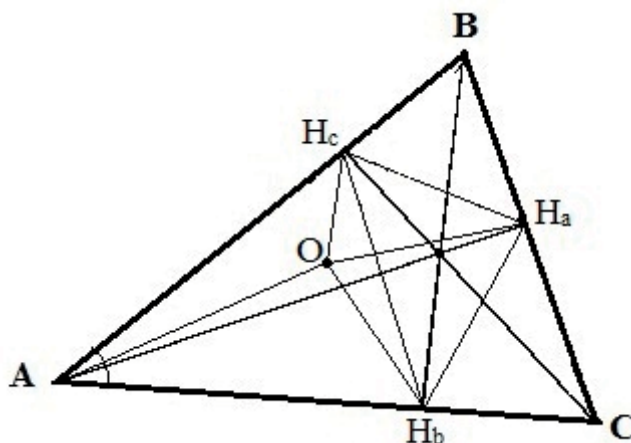


Рис. 13.

Тогда площадь треугольника ABC равна сумме площадей четырехугольников  $AH_bOH_c$ ,  $BH_cOH_a$ ,  $CH_aOH_b$ , диагонали которых взаимно перпендикулярны:

$$S_{\Delta ABC} = S_{AH_bOH_c} + S_{BH_cOH_a} + S_{CH_aOH_b} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot H_bH_c + \frac{1}{2} \cdot BO \cdot H_cH_a + \frac{1}{2} \cdot CO \cdot H_aH_b = \frac{1}{2} \cdot R \cdot H_bH_c + \frac{1}{2} \cdot R \cdot H_cH_a + \frac{1}{2} \cdot R \cdot H_aH_b = R \cdot \frac{H_bH_c + H_cH_a + H_aH_b}{2} = R \cdot p_H,$$

где  $p_H$  - полупериметр ортоцентрического треугольника  $H_aH_bH_c$ . В результате получили формулу, весьма похожую на известную формулу, где  $r$  - радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Теперь мы имеем все факты, необходимые для решения задачи 1. Соединив центр  $O$  описанной окружности треугольника ABC с вершинами  $A_1, B_1, C_1$  вписанного треугольника  $A_1B_1C_1$  и обозначив углы между диагоналями четырехугольников  $AB_1OC_1$ ,  $BC_1OA_1$ ,  $CA_1OB_1$  через  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно (рис. 14), получим:

$$S_{\Delta ABC} = S_{AB_1OC_1} + S_{BC_1OA_1} + S_{CA_1OB_1} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot B_1C_1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot R \cdot C_1A_1 \cdot \sin \beta + \frac{1}{2} \cdot R \cdot A_1B_1 \cdot \sin \gamma = R \cdot \frac{B_1C_1 \cdot \sin \alpha + C_1A_1 \cdot \sin \beta + A_1B_1 \cdot \sin \gamma}{2} = R \cdot p_H,$$

откуда  $B_1C_1 \cdot \sin \alpha + C_1A_1 \cdot \sin \beta + A_1B_1 \cdot \sin \gamma = 2 \cdot p_H$ ,

но  $B_1C_1 \sin \alpha + C_1A_1 \sin \beta + A_1B_1 \sin \gamma \leq B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1$ ,

поэтому  $2p_H \leq B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1$ , т.е. периметр любого треугольника,

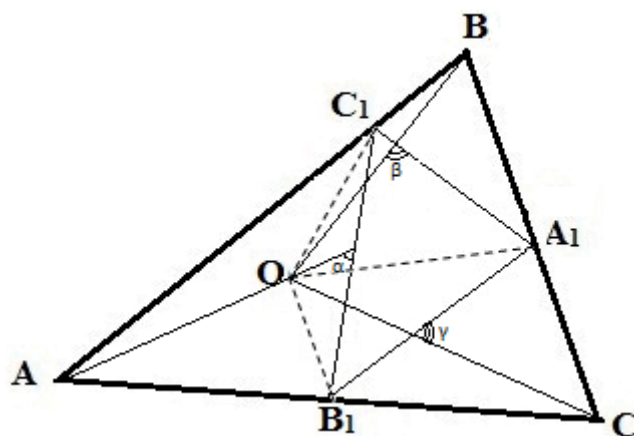


Рис. 14.

вписанного в остроугольный треугольник  $ABC$ , не меньше периметра ортоцентрического, откуда и следует, что ортоцентрический треугольник имеет минимальный периметр среди всех вписанных треугольников.

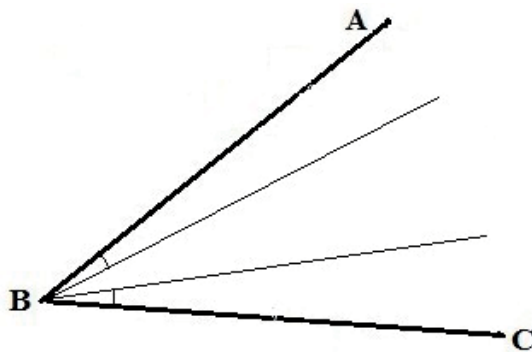


Рис. 15.

Для решения задачи 2 нам понадобится понятие изогональности.

Определение 1. Две прямые, проходящие через вершину угла и образующие равные углы с биссектрисой этого угла, называются прямыми, изогональными относительно этого угла.

Очевидно, что прямые, изогональные относительно данного угла, образуют равные углы со сторонами этого угла (рис. 15).

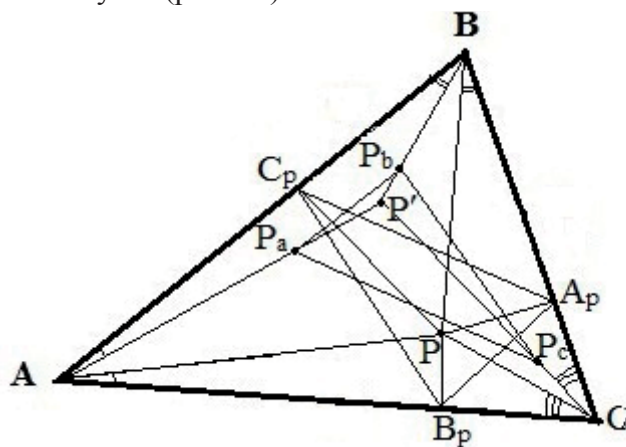


Рис. 16.



Предложение 1. Пусть прямые, проведенные через вершины треугольника  $ABC$ , пересекаются в одной точке  $P$ , не лежащей на его описанной окружности. Тогда изогональные им прямые также пересекаются в одной точке. При этом точки  $P$  и называются изогонально сопряженными или просто изогональными относительно треугольника  $ABC$  (например, как это фактически доказано выше, центр описанной окружности и ортоцентр изогональны).

Доказательство.

Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  через  $A_p, B_p, C_p$  соответственно (рис. 16), а ортоцентры треугольников  $AB_pC_p, BC_pA_p, CA_pB_p$  – соответственно через  $P_a, P_b, P_c$ . Тогда в четырехугольнике  $BA_pPC_p$  углы  $\angle PA_pB$  и  $\angle PC_pB$  прямые, поэтому  $\angle PA_pB + \angle PC_pB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ , т.е. вокруг четырехугольника  $BA_pPC_p$  можно описать окружность, центр которой совпадает с серединой  $O_b$  отрезка  $BP$ . Поскольку вершины треугольника  $BA_pC_p$  лежат на этой окружности, то  $O_b$  – центр описанной окружности треугольника  $BA_pC_p$ , поэтому, как было показано в самом начале решения задачи 1, прямые  $BP_b$  и  $BO_b$  образуют равные углы со сторонами  $AB$  и  $CB$  треугольника  $ABC$ , т.е. изогональны относительно угла  $ABC$  этого треугольника, причем  $BP_b \angle C_pA_p$ . Так как  $PA_p \angle BC$  и  $C_pP_b \angle BC$ , то  $PA_p \parallel C_pP_b$ . Аналогично,  $PC_p \parallel A_pP_b$  и, таким образом, четырехугольник  $PA_pP_bC_p$  – параллелограмм. Поэтому точки  $P$  и  $P_b$  симметричны относительно середины стороны  $C_pA_p$  треугольника  $A_pB_pC_p$ . Точно так же точки  $P$  и  $P_a, P$  и  $P_c$  симметричны относительно середин сторон  $B_pC_p$  и  $A_pB_p$  соответственно, откуда следует, что треугольник  $P_aP_bP_c$  гомотетичен серединному треугольнику треугольника  $ABC$  с центром  $P$  и коэффициентом  $k=2$  и, таким образом, треугольники  $P_aP_bP_c$  и  $A_pB_pC_p$  равны, а их стороны соответственно параллельны. Тогда прямые  $AP_a, BP_b, CP_c$  содержат высоты треугольника  $P_aP_bP_c$  и поэтому пересекаются в одной точке.

Заметим, что если точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то прямые, изогональные прямым  $AP, BP, CP$ , параллельны.

Как известно, точка  $T$ , из которой стороны треугольника  $ABC$  видны под равными углами в  $120^\circ$ , называется точкой Торричелли этого треугольника. Для ее построения достаточно построить на сторонах  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$  правильные треугольники  $ABC_1, BCA_1, CAB_1$  внешним образом, т.е. так, чтобы точки  $A$  и  $A_1, B$  и  $B_1, C$  и  $C_1$  лежали по разные стороны от прямых  $BC, CA, AB$  и описать около треугольников окружности, которые пересекутся в точке  $T$  (рис. 17).

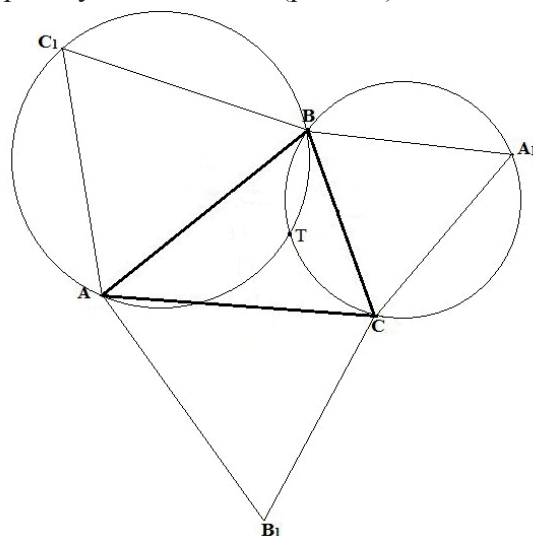


Рис. 17.

Действительно, пусть  $T$  – точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ABC_1$  и  $BCA_1$ . Тогда

$$\angle ATB = 180^\circ - \angle AC_1B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = 180^\circ - \angle BA_1C = \angle CTB$$

и

$$\angle ATC = 360^\circ - \angle ATB - \angle CTB = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ,$$

т.е. описанная окружность треугольника  $CA_1B_1$  также проходит через точку Торричелли  $T$ .

Заметим, что точка Торричелли существует только для треугольников, углы которых не превосходят  $120^\circ$ . Только такие треугольники мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Определение 2. Треугольник  $A_p B_p C_p$ , вершины которого совпадают с основаниями перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямые  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , содержащие стороны треугольника  $ABC$ , называется педальным треугольником точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  (рис. 18).

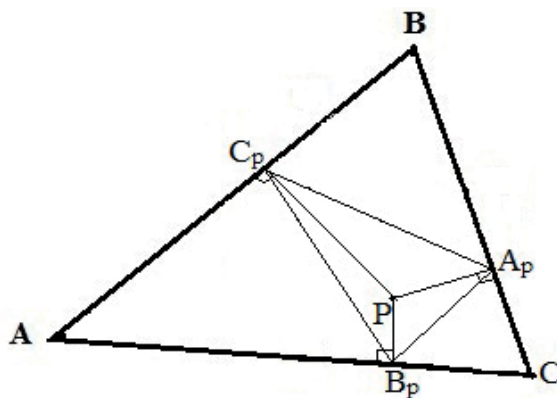


Рис. 18.

Предложение 2. Педальный треугольник точки, изогональной точке Торричелли  $T$  треугольника  $ABC$ , является правильным.

Доказательство. Пусть точка  $T'$  изогональна точке Торричелли  $T$  треугольника  $ABC$  (рис. 19),  $A_{T'} B_{T'} C_{T'}$  – ее педальный треугольник,  $T_a, T_b, T_c$  – точки пересечения отрезков  $AT, BT, CT$  со сторонами  $B_{T'} C_{T'}, C_{T'} A_{T'}, A_{T'} B_{T'}$  треугольника  $A_{T'} B_{T'} C_{T'}$ .

Поскольку точка  $T$  в свою очередь изогональна точке  $T'$ , то из доказательства предложения 1 следует, что  $AT \perp B_{T'} C_{T'}$ ,  $BT \perp C_{T'} A_{T'}$ ,  $CT \perp A_{T'} B_{T'}$ . Тогда в четырехугольнике  $TT_b A_{T'} T_c$  имеем:  $\angle T_b T T_c = 120^\circ$ ,  $\angle T T_b A_{T'} = \angle T T_c A_{T'} = 90^\circ$ , откуда  $\angle T_b A_{T'} T_c = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ . Аналогично,  $\angle A_{T'} B_{T'} C_{T'} = \angle B_{T'} C_{T'} A_{T'} = 60^\circ$  и, таким образом, треугольник  $A_{T'} B_{T'} C_{T'}$  – правильный.

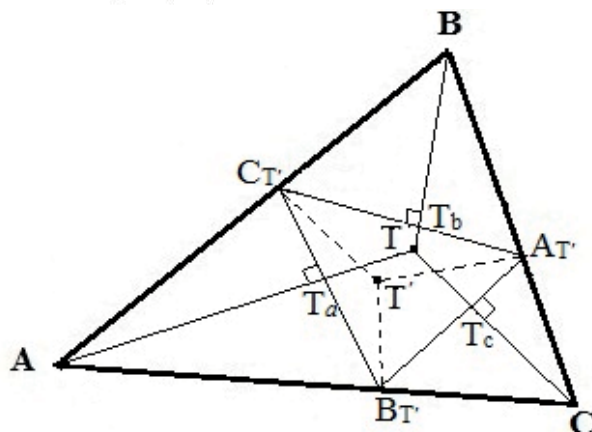


Рис. 19.



Предложение 3. В произвольный треугольник  $ABC$  можно вписать правильный треугольник  $A_1B_1C_1$  так, что его вершины  $A_1, B_1, C_1$  принадлежат сторонам  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  соответственно.

Доказательство. Выберем на сторонах  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  точки  $B'$  и  $C'$  соответственно (рис. 20) и построим на отрезке  $B'C'$  равносторонний

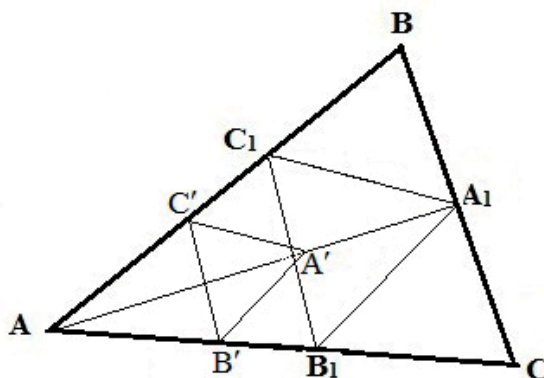


Рис. 20.

треугольник  $A'B'C'$  так, чтобы точки  $A$  и  $A'$  лежали по разные стороны от прямой  $B'C'$ . Пусть  $A_1$  – точка пересечения прямой  $AA'$  со стороной  $BC$ .

Проведем через точку  $A_1$  прямые, параллельные прямым  $A'B'$  и  $A'C'$  и пересекающие стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Тогда вписанный треугольник  $A_1B_1C_1$  – правильный, так как его стороны соответственно параллельны сторонам правильного треугольника  $A'B'C'$ .

Из способа построения ясно, что в данный треугольник  $ABC$  можно вписать бесконечно много равносторонних треугольников  $A_1B_1C_1$ .

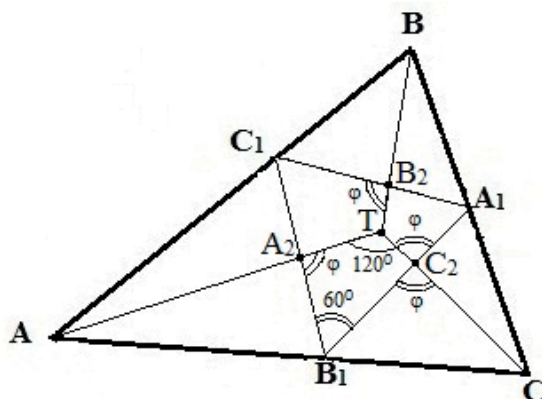


Рис. 21.

Решение задачи 2. Пусть  $A_1B_1C_1$  – правильный треугольник, вписанный в треугольник  $ABC$  (рис. 21),  $T$  – точка Торричелли треугольника  $ABC$ . Точки пересечения отрезков  $AT$  и  $B_1C_1$ ,  $BT$  и  $A_1C_1$ ,  $CT$  и  $A_1B_1$  обозначим через  $A_2, B_2, C_2$ . Тогда  $\angle A_2B_1C_2 + \angle A_2TC_2 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ , откуда  $\angle TA_2B_1 = \angle B_1C_2C = \varphi$ . Обозначим  $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = a$ .

$$\text{Тогда } S = S_{ABC} = S_{AB_1TC_1} + S_{BC_1TA_1} + S_{CA_1TB_1} = \frac{1}{2}AT \cdot a \sin \varphi + \frac{1}{2}BT \cdot$$

$$\cdot a \sin \varphi + \frac{1}{2}CT \cdot a \sin \varphi = \frac{1}{2}(AT + BT + CT) a \sin \varphi,$$

$$\text{откуда } a = \frac{2S}{(AT+BT+CT)\sin\varphi} \geq \frac{2S}{AT+BT+CT}, \text{ причем равенство достигается при } \varphi=90^\circ. \text{ Но из}$$



доказательства предложения 2 следует, что стороны  $B_T C_T$ ,  $C_T A_T$ ,  $A_T B_T$  pedalного треугольника  $A_T B_T C_T$ , точки  $T'$ , изогональной точке Торричелли  $T$  треугольника  $ABC$ , перпендикулярны отрезкам  $AT$ ,  $BT$ ,  $CT$  соответственно, т.е. для правильного треугольника  $A_T B_T C_T$  угол  $\phi=90^\circ$  и, таким образом, треугольник  $A_T B_T C_T$  имеет наименьший периметр среди всех правильных треугольников, вписанных в данный треугольник  $ABC$ .

## Заключение

В статье рассматривались возможные пути перевода образовательных программ по математике на современные рельсы. Авторы статьи показывают, что одним из путей модернизации математического образования является пропедевтика важных разделов высшей математики, основанная на понятиях, связанные с восприятием пространства, и интуитивно близких учащимся. В качестве конкретного примера рассматривалась пропедевтика решения экстремальных задач. Рассмотрение велось с единых позиций и основывалось на важнейшем геометрическом понятии – расстоянии. Заметим, что вопросы, связанные с последними двумя задачами статьи, уже рассматривались в работе [10]. Решение всех задач проводилось с помощью опоры на интуитивно прозрачные пространственные образы. Авторы полагают, что подобную методическую работу следует проводить и в отношении другой актуальной математической тематики.

### Литература

1. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. – М., Наука, 1972.
2. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Геометрия. Учебное пособие. 9 класс. – М., Институт новых образовательных систем. 2001.
3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. – М., Наука, 2006.
4. Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского. – М., МЦНМО, 2004.
5. Фиников С.П. Теория поверхностей. – М., КомКнига, 2010.
6. Mavlo D.P. Problem 624. // *Cruix Mathematicorum*, Vol.7, 1981, № 4 (April), p.116.
7. Mavlo D.P. Solution to the Problem 624. // *Cruix Mathematicorum*, Vol.8, 1982, № 4 (April), p.109–111.
8. Кукушкин Б.Н. Решение задачи № 136. // «Математика в школе», № 4, 2017, С. 67–68.
9. Куланин Е.Д., Федин С.Н. Избранные задачи по геометрии. Треугольник. М., Илекса, 2016.
10. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум. // «Математика в школе», № 4, 2019, С. 35–40.



## Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics

***Kulanin E.D.*** \*

MSUPE, Moscow, Russia  
lucas03@mail.ru

***Nurkaeva I.M.*** \*\*

MSUPE, Moscow, Russia  
nurkaevaim@yandex.ru

***Stepanov M.E.*** \*\*

MSUPE, Moscow, Russia  
mestepanov@yandex.ru

This article discusses the propaedeutics of solving extreme problems. As is known, such tasks play an important role in various fields of science and technology. They often reduce many of the problems that arise in the economy, industry and agriculture. As a rule, the solution of these problems requires the use of a fairly complex mathematical apparatus studied in higher education. However, many problems on the maximum and minimum can be solved by elementary means without the use of higher mathematics. The solution of such problems is very useful for students as propaedeutics of the relevant subjects.

**Keywords:** Distance on a plane, distance on a curved surface, geodesic line, level line, ellipse, hyperbola, gradient, extremum, perimeter, orthocentric triangle, pedal triangle, right triangle, isogonal straights, isogonal points, Torricelli point.

### ***References***

1. D'edonne Zh.. Lineinaya algebra i ehlementarnaya geometriya. – M., Nauka, 1972.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Geometriya. Uchebnoe posobie. 9 klass. – M., Institut novykh obrazovatel'nykh sistem. 2001.
3. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. Analiticheskie poverkhnosti. – M., Nauka, 2006.

### **For citation:**

Kulanin E.D., Nurkaeva I.M., Stepanov M.E. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 127–144. doi: 10.17759/mda.2019090411 (In Russ., abstr. in Engl.)

\****Kulanin Evgeny Dmitrievich***, candidate of physics and mathematics, Professor of the Department of applied mathematics, «Moscow state University of psychology and education», Moscow, Russia. E-mail: lucas03@mail.ru

\*\****Nurkaeva Irina Mikhailovna***, candidate of pedagogics, docent of applied Informatics and multimedia technologies, «Moscow state University of psychology and education», Moscow, Russia. E-mail: nurkaevaim@yandex.ru

\*\*\****Stepanov Mikhail Evgrafovich***, candidate of pedagogics, docent of the Department of applied mathematics, «Moscow state University of psychology and education», Moscow, Russia. E-mail: mestepanov@yandex.ru





4. Prasolov V.V. Geometriya Lobachevskogo. – М., МТСНМО, 2004.
5. Finikov S.P. Teoriya poverkhnostei. – М., КоМКнига, 2010.
6. Mavlo D.P. Problem 624. // Crux Mathematicorum, Vol.7, 1981, № 4 (April), p.116.
7. Mavlo D.P. Solution to the Problem 624. // Crux Mathematicorum, Vol.8, 1982, № 4 (April), p.109–111.
8. Kukushkin B.N. Reshenie zadachi № 136. // «Matematika v shkolE», № 4, 2017, s.67–68.
9. Kulanin E.D., Fedin S.N. Izbrannye zadachi po geometrii. Treugol'nik. М., Ileksa, 2016.
10. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. O dvukh geometricheskikh zadachakh na ehkstreumum. // «Matematika v shkolE», № 4, 2019, s.35-40.

## Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой

**Куланин Е.Д.\***

ФГБОУ ВО «МГППУ», Москва, Россия  
lucas03@mail.ru

**Нгуен Ву Куанг\*\***

ФГБОУ ВО «МГППУ», Москва, Россия

**Степанов М.Е.\*\*\***

ФГБОУ ВО «МГППУ», Москва, Россия  
mestepanov@yandex.ru

В статье рассматриваются перспективы внедрения идеи соединения материальных осязаемых объектов, предназначенных для ознакомления учащихся с математическими понятиями, и сопровождающих эти объекты обучающих программ. Тем самым была выдвинута идея осязаемой предметности с компьютерной поддержкой в учебный процесс. Компьютерная поддержка осязаемой предметности в любых её формах является средством достижения наилучших условий для самостоятельного изучения учащимися с дефектами зрения некоторых вопросов математики. По этой причине желательно вести разработки программного обеспечения в этом направлении.

**Ключевые слова:** осязаемая предметность, осязаемый треугольник, изучение циклоидов.

### Введение

Методическая проработка курса лекций или семинарских занятий является неотъемлемой частью преподавательской работы. Работают в этом направлении и авторы данной

#### Для цитаты:

Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е. Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 145–156. doi: 10.17759/mda.2019090412

\***Куланин Евгений Дмитриевич**, к.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», Москва, Россия. E-mail: lucas03@mail.ru

\*\***Нгуен Ву Куанг**, Студент, ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», Москва, Россия.

\*\*\***Степанов Михаил Евграфович**, к.п.н., доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» Москва, Россия. E-mail: mestepanov@yandex.ru



статьи [1–3]. Однако в силу специфики учебного заведения преподавателям приходится заниматься достаточно нестандартными методическими вопросами.



Рис. 1.

Одним из важных направлений работы факультета информационных технологий Московского государственного психолого-педагогического университета является работа с инвалидами, в том числе и по зрению. По этой причине практически каждому преподавателю факультета приходится, так или иначе, задумываться над вопросами тифлопедагогики (см., например, [4]).

Тифлопедагогика сопряжена с постоянным решением различных проблем, возникающих как перед учащимися, так и перед преподавателями. По этой причине решать эти проблемы следует совместно, в постоянном творческом диалоге. Это в равной мере относится и к вопросам частного характера, связанным с изучением конкретных тем, и к вопросам, касающимся выработки общих приёмов преподавания. Данная статья в известном смысле является результатом такого диалога.

## Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой

В ходе общего обсуждения проблем обучения студентов с дефектами зрения Нгуен Ву Куангом была высказана идея соединения материальных осязательных объектов, предназначенных для ознакомления учащихся с математическими понятиями, и сопровождающих эти объекты обучающих программ. Тем самым была выдвинута идея осязаемой предметности с компьютерной поддержкой. Рассмотрению перспектив внедрения этой идеи в учебный процесс как раз и посвящена данная статья.

Первой конкретной реализацией данной идеи стала тема «Осязаемый треугольник с целочисленными длинами сторон». Основными аспектами данной работы стали

1. Выбор механической модели треугольника, позволяющей легко формировать достаточно многочисленный набор осязаемых треугольников.
2. Выбор основных параметров треугольника, информировать о которых должна сопровождающая компьютерная программа.
3. Разработка программы с продуманным интерфейсом и удобным для обучаемого способом выдачи информации.

В ходе конкретного воплощения проекта в жизнь было решено использовать для создания осязаемых моделей треугольников детали детского металлического конструктора, называемые планками (рис. 1). Они позволяют без каких-нибудь затруднений собирать модели именно тех треугольников, которые имеют целочисленную длину сторон (с точностью до подобия). Для этого соединяют три линейных планки с отверстиями с помощью винтов и гаек. Осязать подобную модель можно, как ощупывая плоскую часть планок с отверстиями, так и проводя пальцем по внутреннему треугольному отверстию в осязаемой модели.



В качестве параметров, которые вычисляются по длине сторон и комментируются поддерживающей компьютерной программой, рассматривались величины углов треугольника, длины таких замечательных отрезков как высоты, биссектрисы и медианы. Кроме того, программа вычисляет площадь треугольника и радиусы описанной, вписанной и внеписанных окружностей.

Все эти величины рассматриваются в школьном курсе планиметрии, но продвинутые варианты поддерживающей программы могли бы информировать учащегося более подробно, давая соответствующие определения.

Необходимо отметить, что предлагаемый способ осязательного знакомства с треугольниками носит особый характер, отличный от традиционных методов изучения евклидовой геометрии. По этой причине необходимо сосредоточиться на построении соответствующих методик, связывающих осязательный метод обучения с классическим методом, базирующемся на основе логических построений. При этом нелишне будет вспомнить об идеях И.М. Сеченова, изложенных в его книге [5], которую И.П. Павлов назвал гениальным взмахом русской научной мысли.

Возможно, многие идеи Сеченова в наше время несколько устарели, но при разработке методик, связанных с осязанием предметов, они, как кажется авторам, очень полезны. В книге Сеченова последовательно развивается мысль о том, что основой деятельности мозга являются рефлексы. В наше время сводить духовный мир человека к одним рефлексам невозможно. Тем не менее, более широкая трактовка следующих идей Сеченова может быть полезна, поскольку она тесно связывает телесные и духовные действия человека воедино. А эта связь особенно ярко проявляется в тифлопедагогике.

Кратко повторим хрестоматийные положения из книги великого русского учёного. Рефлекс – это устойчивая реакция организма на определенное внешнее воздействие. Если деятельность мозга основана на рефлексах, то наш внутренний духовный мир есть отражение мира внешнего (добавим от себя: хотя бы отчасти). В конечном счёте, первопричина любого действия человека исходит из внешнего мира: постороннее воздействие – возбуждение нерва – реакция мозга – движение организма. Это «движение» нужно понимать весьма широко. Оно включает в себя и духовную жизнь человека. При этом мысль трактуется И.М. Сеченовым как рефлекс с задержанным окончанием, а эмоции как рефлексы с усиленным окончанием. При создании методик, основанных на осязании и направленных на развитие мышления, необходимо иметь это в виду.

## **Материалы для создания осязаемой предметности**

Коснёмся вопроса о выборе материалов для создания осязаемой предметности. На первый взгляд речь идёт о чём-то второстепенном, но, на наш взгляд, до тех пор, пока технологии создания осязаемой предметности не сформированы в должной мере, интерес могут представлять даже варианты, которые кажутся кустарными. В качестве подтверждения напомним о японской фирме, которая процветала, используя и развивая идеи читателей отечественного журнала «Наука и жизнь», придумывающих различные бытовые приспособления.

Кроме довольно технологичного варианта создания осязаемых треугольников из деталей конструктора нами рассматривался «кустарный» вариант использования трубочек для сока и коктейлей. Из них без труда можно вырезать детали нужной длины. Соединить их можно различными способами:

1. Прodef нитку (рис. 2).
2. Шариками пластилина.
3. Проволочками (рис. 3).

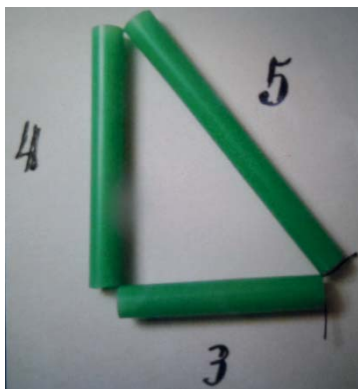


Рис. 2 Осязаемый египетский треугольник



Рис. 3 Фаза создания осязаемого тетраэдра

Вернёмся к технологиям, которые основаны на использовании деталей конструктора. На этой же основе авторами рассматривались варианты осязательного метода, более близкие к курсу аналитической геометрии, чем описанный выше. Речь идёт об использовании осязаемых моделей, для которых целые значения имеют не длины, а координаты вершин плоских и объёмных фигур. В простейшем случае речь идёт о треугольниках с целочисленными координатами вершин.

Их можно моделировать с помощью таких деталей конструктора, как основания (рис. 4) и пластины (рис. 5), а также хорошо осязаемых шнуров.

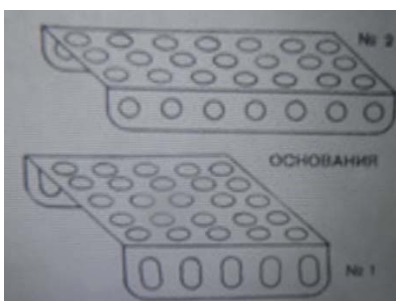


Рис. 4 Основания

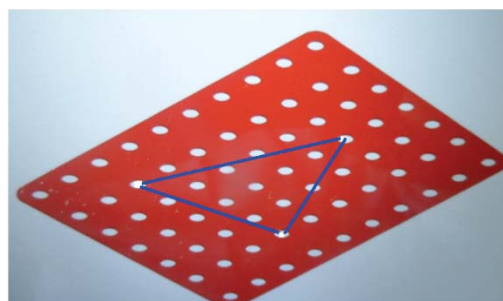


Рис. 5 Пластина со шнурами

Компьютерная поддержка данных осязаемых моделей требует вычисления длин сторон треугольника по координатам вершин. При этом используется теорема Пифагора, а поочерёдное ощупывание и подсчёт отверстий на пластине по её ширине и высоте обосновывает правильность вычислений и делает их наглядными, насколько это возможно.

Легко понять, что данный вид плоских моделей позволяет изучать многоугольники различного вида, в том числе такие важные четырёхугольники как параллелограммы, трапеции, ромбы и т.д. Для каждого вида многоугольников должна быть написана специальная поддерживающая программа.

Кроме того, точно такие же модели можно использовать при изучении векторной алгебры на декартовой плоскости. Речь идёт о сложении и вычитании векторов, а также об их разложении по заданным направлениям.

В том же духе (детали конструктора и шнуры) можно развивать технологию создания объёмной осязаемой предметности. При этом следует использовать многоярусные

модели. Начнём с описания тетраэдров с целочисленными координатами вершин. С помощью двух оснований создаётся двухъярусная конструкция, на которую натягиваются шнуры-рёбра (рис 6, 7).



Рис. 6 Модель тетраэдра



Рис. 7 Изучение модели с помощью осязания

Возможно создание более сложных объёмных двухъярусных моделей. Речь идёт о моделях пирамид (при большом числе рёбер, передающих также форму конусов), призм (при большом числе рёбер, передающих также форму цилиндров) и линейчатых поверхностей второго порядка. В технологические тонкости мы не вдаёмся, поскольку общая идея ясна, а конкретная проработка проекта требует учёта многочисленных деталей.

Затронем только один вопрос. Он связан с тем, что каждому виду объёмных осязаемых моделей должна соответствовать своя форма пластин, образующих ярусы, а также взаимное расположение этих пластин. Так для создания моделей призм можно использовать две круглых пластины, соединённых в двухъярусную конструкцию вертикальным стержнем. Ещё одним полезным примером являются антипризмы.

На рисунке 8 без прорисовки технических деталей изображена пятиугольная антипризма. При этом понятно, что каждая из двух пластин должна быть пятиугольником и что пятиугольники по отношению друг к другу должны быть повернуты особым образом.

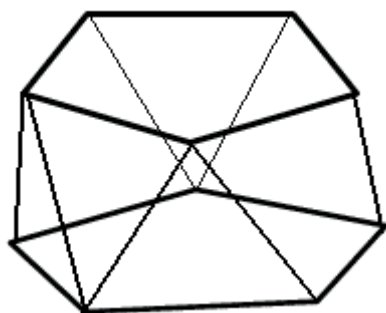


Рис. 8

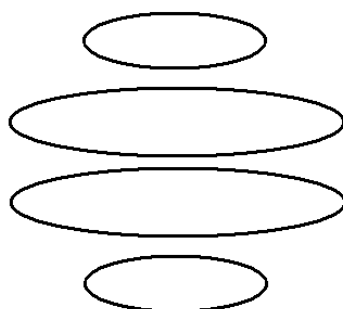


Рис. 9

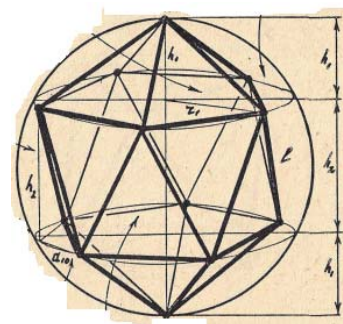


Рис. 10

На одном стержне могут держаться и многоярусные конструкции, предназначенные для создания осязаемых моделей более сложных тел. На использовании многоярусных



моделей можно построить изучение многогранников, в том числе платоновых тел. На рисунке 9 показана схема четырёхуровневой конструкции, которую можно использовать для моделирования икосаэдра и додекаэдра. А рисунок 10 помогает понять, что осязаемая модель икосаэдра расслаивается на три двухуровневые модели – две пятиугольных пирамиды и антипризма.

Как предварительный итог мы можем констатировать, что представляется перспективным направлением работы создание специально ориентированных на тифлопедагогику осязательных конструкторов, в частности основанных на использовании деталей обычных металлических конструкторов с добавлением шнуровых технологий. Одно из достоинств таких конструкторов должно состоять в том, что обучаемый сможет самостоятельно создавать модели плоских фигур и объёмных тел, а не только осязать готовые.

Видимо, здесь можно использовать и дополнительные возможности. В частности в интернете высказано мнение, что изгибание деталей металлических конструкторов открывает поистине безграничные возможности для конструирования. Однако здесь нужна детальная проработка вопроса. Ещё одним перспективным направлением представляется использование некоторых головоломок.

У тех читателей статьи, кто концентрирует своё внимание не на координатах вершин многогранников, а только на их форме, может возникнуть вопрос, нужно ли при наличии 3d-принтеров разрабатывать специализированные конструкторы? Не лучше ли с помощью 3d-технологий создавать наборы осязаемых моделей математических объектов и оснащать их компьютерной поддержкой? Ответ достаточно очевиден: следует использовать все доступные варианты моделирования осязаемой предметности.

Отметим, что история создания соответствующих стационарных осязаемых моделей достаточно продолжительна. На картинах Леонардо многогранники изображаются как объекты, сконструированные из реек. На картине фламандского художника Николы Нейшталя «Урок геометрии» показано использование такой модели в учебном процессе. В книге [6] описывается технология изготовления многогранников из бумаги. Не редкость геометрические объекты из резины, пластилина и гипса. Последние часто применяются при классических методиках обучения рисованию.

В статье [7] рассказано о производстве гипсовых математических моделей на рубеже XIX – XX веков. Современные 3d-принтеры позволили бы поставить производство подобных моделей математических объектов, которые в равной степени полезно и осматривать, и осязать, на поток. Тем более, что есть очень интересные и перспективные идеи, связанные с наглядной геометрией и наглядной топологией (см., например, [8–11]). Было бы очень полезно превратить рисунки в осязаемые модели, снабдив их компьютерной поддержкой. Тем самым, можно выделить как важное направление разработки осязаемых моделей создание наборов фигур и тел с компьютерной поддержкой.

## **Изучение кривых механического происхождения**

Ещё одна идея, высказанная Нгуен Ву Куангом, связана с трудностями, которые испытывают студенты с дефектами зрения при изучении различных кривых и, прежде всего, кривых механического происхождения. Была начата работа и в этом направлении. В частности была предложена конструкция механизма, который позволяет с помощью осязания изучить возникновение циклоид различного вида (циклоид как таковых, укороченных и удлинённых циклоид).

Данный механизм состоит из простой механической части, которая показана на рисунке 11. По рейке катится шестерня, на которой закреплена радиальная планка с тремя отверстиями. В каждое из отверстий можно вставить стержень, который будет «прочерчивать» одну из циклоид [12].

**Рамка, позволяющая шестерне катиться по прямой. На шестерне радиальная пластина. Перпендикулярно пластине могут торчать три сменных стержня. В нужный момент используется только один стержень, вычерчивающий одну из кривых.**

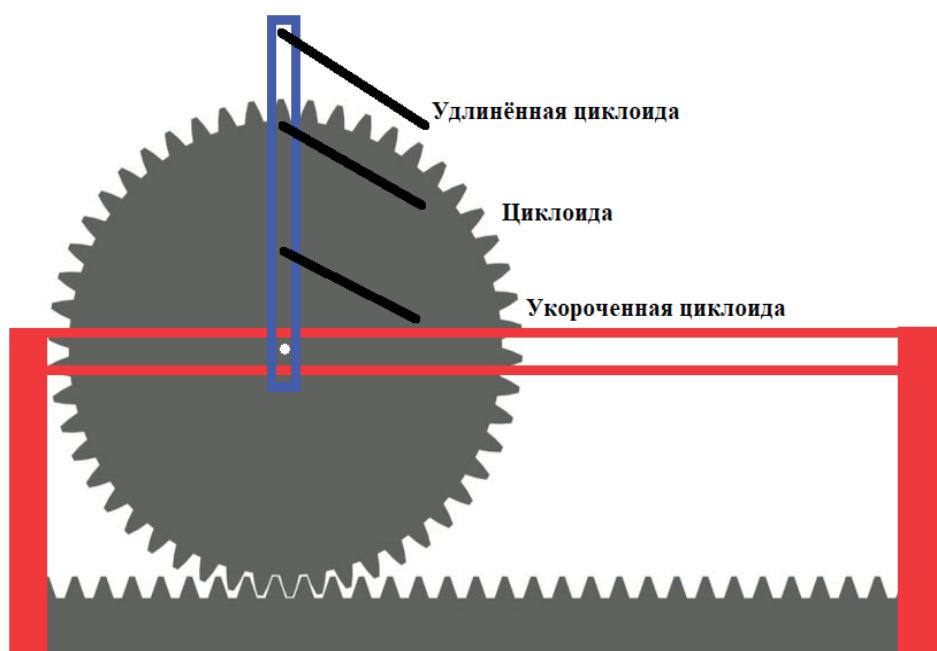


Рис. 11.

Вторая часть механизма представляет собой пластину, в которой прорезана одна из циклоид. Таких пластин три. Форма прорезей показана на рисунке 12 (на рисунке они совмещены). В зависимости от положения стержня, вычерчивающего кривую, к механизму прикрепляется одна из этих пластин.

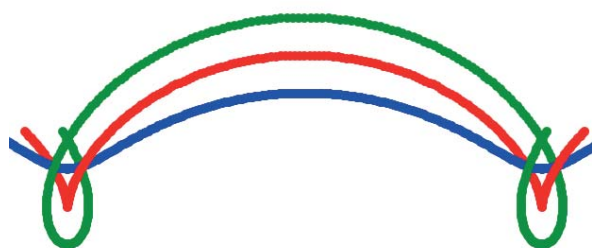


Рис. 12.

Вычерчивающий стержень при качении шестерни скользит в прорези. Как результат форма кривой не только осязается, но и увязывается с механическим процессом.

Аналогичным образом можно разработать механизмы для изучения циклоидальных кривых и трохоид [12]. В настоящее время делается попытка по созданию действующих моделей соответствующих механизмов.

Возможно также создание механизмов, демонстрирующих не только механическое порождение кривой, но и некоторые дополнительные свойства этой линии. Вкратце опишем механизм, соединяющий процедуру построения эллипса с одновременным построением касательной к нему. Эллипс, как обычно, строится с помощью шнурового кольца (рис. 13), накинутаго на два стержня-фокуса  $C_1$  и  $C_2$ . Однако этот шнур, кроме всего прочего, пройдет через две трубочки механического приспособления, направляющего специально предназначенный для этого стержень  $BD$  по касательной к эллипсу (рис. 14).

В настоящее время делается попытка по созданию действующих моделей соответствующих механизмов.



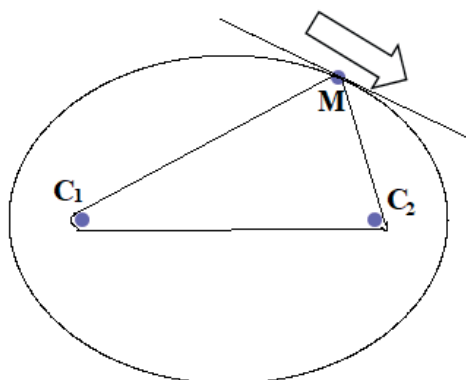


Рис. 13

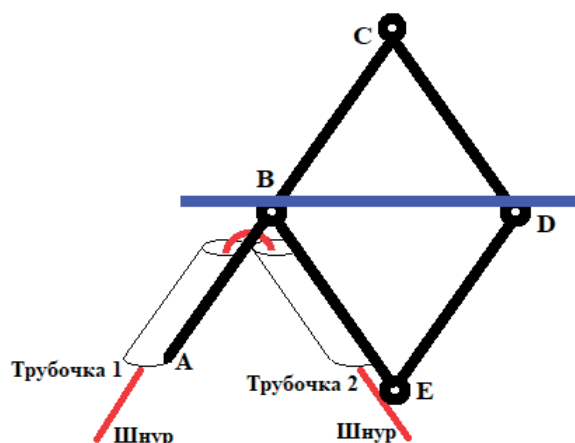


Рис. 14

Сделаем несколько пояснений по поводу устройства шарнирного механизма ABCDE. Прежде всего, через трубочки пройдет шнур. Стержень ABC является единой жёсткой деталью, прикреплённой к первой трубочке. Стержень BE прикреплён ко второй трубочке. Трубочки с прикреплёнными к ним стержнями свободно могут менять взаимное положение с помощью шарнира В. Это позволяет углу ABE между стержнями соответствовать углу, образуемому шнуром в точке изгиба (точка М). Шарнирный ромб BCDE обеспечивает перпендикулярность стержня BD биссектрисе угла ABE, а это и означает, что стержень BD является касательной к эллипсу (см., например, [1]).

В связи со всем сказанным ранее желательно рассмотреть достижения механики с позиций тифлопедагогики. Например, среди работ И.И. Артоболевского, создавшего отечественную научную школу теории механизмов и машин, есть статьи о механизмах, решающих математические задачи, в том числе и о механизмах, вычерчивающих эллипсы [13]. Более того, в популярных математических книгах, например, [8] и [14], рассматриваются вопросы, связанные с шарнирными механизмами. Наконец, есть поучительные и при этом очень несложные механизмы, которые легко создать с помощью простых технологий и материалов. Например, при изучении кривых постоянной ширины можно использовать, легко моделируемый треугольник Рело.

В заключение очень кратко коснёмся вопроса об особых формах тифлопедагогических технологий, которые эмулирует либо процесс осязания, либо осязаемые объекты. Речь и об использовании специальных компьютерных технологий и о виртуальных объектах. Более подробно об этом говорится в статье [4]. Суть метода «ощупывания компьютерных изображений» в том, что перемещение указателя по обычному экрану или прикосновение пальца к сенсорному экрану вызывает отклик, выражающийся в изменении силы звука по принципу «тепло – холодно». Для достаточно простых изображений этот метод позволяет воспринять форму виртуального объекта, например, графика функции.

### Идея тренажёра «Темная комната»

Скажем ещё и об использовании осязаемых объектов нестандартной конструкции и нестандартных размеров. Теоретическое рассмотрение этих вопросов только начато. По этой причине излагаем лишь набросок соответствующей идеи. Исходной точкой при возникновении обсуждаемой идеи был важный и постоянно вызывающий первоочередной интерес вопрос о способах ориентации слабовидящих людей в пространстве города.



Возникла идея создания своеобразных тренажёров, каждый из которых условно может быть назван «тёмной комнатой». Что касается внутреннего наполнения «тёмных комнат», то они могут быть пустыми, наполненными условной мебелью, наконец, многоэтажными. Форма «тёмных комнат» может быть произвольной за счёт использования верёвочных границ и ширм. Речь может даже идти о неких аналогах географических карт.

Теперь о предполагаемых целях использования «тёмных комнат».

1. Психологические исследования возможностей ориентирования за счёт одного осязания, включая оценку возможностей испытуемых по оценке расстояний, форм и способности передать результаты своего пребывания в «тёмной комнате» преемникам. Пример задания для квадратной или круглой комнаты: определить форму, размеры и переместиться в центр комнаты.
2. Привлечение зрячих к экспериментам с целью сравнения их возможностей с возможностями незрячих. Кроме того, такие эксперименты позволят зрячим лучше понять проблемы незрячих.
3. Разработка и проверка эффективности различных компьютерных технологий ориентации в ограниченных пространствах.
4. Выработка методик эффективного описания «тёмных комнат» для передачи информации впервые попадающим в тренажёр.
5. Разработка заданий и методик обучения эффективному ориентированию в «тёмных комнатах»

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении перечислим основные направления деятельности в области создания осязаемой предметности с компьютерной поддержкой.

1. Компьютерная поддержка осязаемой предметности в любых её формах является средством достижения наилучших условий для самостоятельного изучения учащимися с дефектами зрения некоторых вопросов математики. По этой причине желательно вести разработки программного обеспечения в этом направлении.
2. Следует пересмотреть все используемые ранее достижения педагогической науки с точки зрения, исходящей из потребностей тифлопедагогики. Речь идёт о ранее созданных наглядных пособиях, в частности о конструкторах, головоломках, стационарных моделях геометрических объектов.
3. Следует провести пересмотр идей наглядной геометрии и наглядной топологии с позиций тифлопедагогики с целью создания максимально широкого класса осязаемых моделей.
4. Необходим пересмотр достижений механики с тех же позиций.
5. Следует работать над созданием наборов осязаемых моделей геометрических объектов с помощью 3D-принтеров.
6. Следует разрабатывать программы для «ощупывания» виртуальных объектов.
7. Нужно вести разработку тренажёров по типу «тёмной комнаты».

### *Литература*

1. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Рукопись.
2. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* Роль образного мышления в научном мышлении. Рукопись.



3. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.
4. Степанов М.Е. Из опыта работы в области тифлопедагогики // Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 42–53.
5. Рефлексы головного мозга / И.М. Сеченов. – Москва: АСТ, 2015. – 352 с.
6. Веннинджер М. Модели многогранников. – Москва: Мир, 1974. – 236 с.
7. Кутеева Г.А., Синильщикова Г.А., Трофименко Б.В. Математические модели каталога Мартина Шиллинга. Математика в высшем образовании. № 15, 2017.
8. Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия. – Москва: Наука, 1981. – 344 с.
9. Болтянский В.Г., Ефремович В.А., Наглядная топология. – Москва: Наука, 1982. – 160 с.
10. Франсис Дж. Книга с картинками по топологии. – Москва: Мир, 1991. – 350 с.
11. Фоменко А.Т. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. – Москва: Изд. МГУ, 1998. – 416 с.
12. Савёлов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. М., ЛЕНАНД, 2009.
13. Боголюбов А.Н. Иван Иванович Артоболевский: 1905–1977. Создатель советской научной школы теории механизмов и машин. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 296 с.
14. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – Москва: Физматгиз, 1962. – 263 с.



## Tangible objectivity with computer support

***Kulanin E.D.*** \*

MSUPE, Moscow, Russia  
lucas03@mail.ru

***Nguen Vu Kuang*** \*\*

MSUPE, Moscow, Russia

***Stepanov M.E.*** \*\*\*

MSUPE, Moscow, Russia  
mestepanov@yandex.ru

The article discusses the prospects for the introduction of the idea of connecting material tactile objects designed to familiarize students with mathematical concepts and accompanying these objects of training programs. Thus, the idea of tangible representation with computer support in the educational process was put forward. Computer support of tangible objectivity in any of its forms is a means of achieving the best conditions for self-study by students with visual defects of some questions of mathematics. For this reason, it is desirable to conduct software development in this direction.

**Keywords:** tangible objectivity, tangible triangle, study of cycloids.

### ***References***

1. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Propedevtika resheniya ehkstreml'nykh zadach v shkol'nom kurse matematiki. Rukopis'.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Rol' obraznogo myshleniya v nauchnom mysh-lenii. Rukopis'.
3. Stepanov M.E. Nekotorye voprosy metodiki prepodavaniya vysshei matematiki // Modelirovanie i analiz dannykh. 2017. № 1. S. 54–94.
4. Stepanov M.E. Iz opyta raboty v oblasti tiflopedagogiki // Modelirovanie i analiz dannykh. 2017. № 1. S. 42–53.
5. Refleksy golovno go mozga/ I.M. Sechenov. – Moskva: AST, 2015. – 352 s.
6. Vennindzher M. Modeli mnogogrannikov. – Moskva: Mir, 1974. – 236 s.

### **For citation:**

Kulanin E.D., Nguen Vu Kuang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 145–156. doi: 10.17759/mda.2019090412 (In Russ., abstr. in Engl.)

\****Kulanin Evgeny Dmitrievich***, candidate of physics and mathematics, Professor of the Department of applied mathematics, «Moscow state University of psychology and education», Moscow, Russia. E-mail: lucas03@mail.ru

\*\****Nguen Vu Kuang***, student, «Moscow state University of psychology and education» Moscow, Russia.

\*\*\****Stepanov Mikhail Evgrafovich***, candidate of pedagogics, docent of the Department of applied mathematics, «Moscow state University of psychology and education», Moscow, Russia. E-mail: mestepanov@yandex.ru



7. Kuteeva G.A., Sinil'shchikova G. A., Trofimenko B.V. Matematicheskie modeli kataloga Martina Shillinga. Matematika v vysshem obrazovanii. № 15, 2017.
8. Gil'bert D., Kon-Fossen S., Naglyadnaya geometriya. – Moskva: Nauka, 1981. – 344 s.
9. Boltyanskii V.G., Efremovich V.A., Naglyadnaya topologiya. – Moskva: Nauka, 1982. – 160 s.
10. Fransis Dzh. Kniga s kartinkami po topologii. – Moskva: Mir, 1991. – 350 s.
11. Fomenko A.T. Naglyadnaya geometriya i topologiya: Matematicheskie obrazy v real'nom mire. – Moskva: Izd. MGU, 1998. – 416 s.
12. Savelov A.A. Ploskie krivye: Sistematika, svoistva, primeneniya. M., LENAND, 2009.
13. Bogolyubov A.N. Ivan Ivanovich Artobolevskii: 1905–1977. Sozdatel' sovetskoi nauchnoi shkoly teorii mekhanizmov i mashin. – Moskva: LE-NAND, 2017. – 296 s.
14. Rademakher G., Teplits O. Chisla i figury. – Moskva: Fizmatgiz, 1962. – 263 s.





**Ключевые слова:** линейная дискретная система, задача быстродействия, метод декомпозиции.

Математические модели, возникающие в различных областях прикладной математики, нередко характеризуются высокой размерностью, что приводит к соответствующим вычислительным трудностям при решении задач анализа и синтеза. Одним из распространённых подходов в теории управления снижения сложности решаемых задач является декомпозиция исходной динамической системы на подсистемы меньшей размерности. В случае линейных систем данный подход во многом сопряжён с различными разложениями матрицы состояния, подробно рассмотренными и описанными в работе.

В свою очередь, задача быстродействия, являясь частным случаем задачи оптимального управления, в дискретной постановке обладает определёнными особенностями, определяющими специфику методов, применяемых для её решения. Такой инструмент, как принцип максимума, оказывается несостоятельным в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний. С другой стороны, метод динамического программирования в силу дискретности критериальной функции в общем случае сводится к полному перебору.

В работе была предложена эффективная модификация метода динамического программирования, которая во многом базировалась на использовании аппарата множеств управляемости и достижимости. Разработанный подход позволяет построить оптимальный по быстродействию процесс для конечномерной линейной дискретной системы с линейными ограничениями на управление посредством решения ряда задач линейного программирования. Также был рассмотрен более общий случай выпуклых ограничений на управление, где на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации, задача быстродействия для исходной системы сводится к случаю линейных ограничений.

Принципиальная сложность использования данных методов заключается в том, что для этого требуется в явном виде построить множества  $0$ -управляемости системы за произвольное число шагов. Даже в случае линейных ограничений, где множества  $0$ -управляемости являются многогранниками, процедура вычисления их вершин сводится к построению конечной суммы Минковского многогранников. Хотя существует большое количество алгоритмов сложения многогранников, основная их часть в  $n$ -мерном пространстве заключается в практически полном переборе элементов верхней оценки множества вершин, число которых растёт экспоненциально. При этом проверка, является ли некоторая точка вершиной многогранника, основывается на свойствах выпуклых множеств и заключается в решении задачи линейного программирования.

Таким образом вычислительная сложность решения задачи быстродействия для конечномерной системы возрастает экспоненциально при росте минимального числа шагов, необходимого для достижения нуля. Данный факт делает актуальным поиск и разработку методов декомпозиции исходной системы на подсистемы, допускающие более быстрое решение за счёт аналитического описания оптимального управления или построения множеств  $0$ -управляемости в явном виде.

#### **Финансирование**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–08–00128-а).



### *Литература*

1. *Елкин В.И.* Подсистемы управляемых систем и задача терминального управления // *АиТ.* 1995. No 1. С. 21–29.
2. *Камачкин А.М., Шамберов В.Н.* Метод декомпозиции в многомерных нелинейных динамических системах // *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии.* 2012. No 1. С. 47–55.
3. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne:EPFL, 2007.
4. *Fukuda K., Weibel C.* On f-vectors of Minkowski additions of convex polytopes // *Discrete and Computational Geometry.* 2007. No. 37. P. 503–516.
5. *Ангелов Т.А.* Нахождение крайних точек суммы двух политопов // *Вестн. Вол-гогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ.* 2016. Т. 37. No 6. С. 7–17.
6. *Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.* The quickhull algorithm for convex hulls // *ACM Transactions on Mathematical Software.* V. 4. No. 22. 1996. P. 469–483.
7. *Каменев Г.К., Поспелов А.И.* Полиэдральная аппроксимация выпуклых компактных тел методами наполнения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. No 5. С. 818–828.
8. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.:Вычислительный центр РАН, 2010.
9. *Циглер Г.М.* Теория многогранников. М.:МЦНМО, 2014.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
11. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
12. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.:Мир, 1989.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ.* 2003. No 12. С. 17–32.
15. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ.* 2015. No 9. С. 3–30.
16. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстроддействию управление движением аэростата // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2015. No 83.
17. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстрогодействия линейной дискретной системой // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2016. No 87.
18. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. No 3. С. 3–25.
19. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. No 10. С. 3–32.





## On a decomposition method in the problem of operation speed for a linear discrete system with bounded control

**Ibragimov D.N.\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
rikk.dan@gmail.com

**Turchak E.E.\*\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
turchak.kate@mail.ru

The article presents the problem of operation speed for a linear discrete system with bounded control. For the case when the minimum number of steps necessary for the system to reach zero significantly exceeds the dimension of the phase space, a method of decomposition into scalar and two-dimensional subsystems is developed, based on the reduction of the state matrix to normal Jordan form. Moreover, due to the developed algorithm for adding two polyhedrons with linear complexity, it is possible to construct sets of 0-controllability for two-dimensional subsystems in an explicit form. A description of the main tools for solving the problem of operation speed is also presented, as well as the statement of the decomposition problem. Further, some properties of polyhedrons in the plane are formulated and proved, on the basis of which an algorithm for calculating the set of vertices of the sum of two polyhedrons in  $R^2$  in explicit form is developed. In conclusion, the main decomposition theorem is formulated and proved. And on the basis of the developed methods, the solution to the problem of the optimal damping speed of a high-rise structure located in the zone of seismic activity was constructed.

**Keywords:** linear discrete system, problem of operation speed, method of decomposition.

### **Funding**

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № .18–08–00128-a)

### **For citation:**

Ibragimov D.N., Turchak E.E. On a decomposition method in the problem of operation speed for a linear discrete system with bounded control. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 157–161. doi: 10.17759/mda.2019090413 (In Russ., abstr. in Engl.)

\***Ibragimov Danis Nailevich**, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. Email: rikk.dan@gmail.com

\*\***Turchak Ekaterina Evgenevna**, student of magistracy, Moscow Aviation Institute (National Research University Moscow, Russia. E-mail: turchak.kate@mail.ru



### **References**

1. Elkin V.I. Subsystems of controllable systems and the problem of terminal control // *Autom. Remote Control*. 1995. V. 56. No. 1. P. 16–22.
2. Kamachkin A.M., SHamberov V.N. Metod dekompozicii v mnogomernyh nelinejnyh dinamicheskikh sistemah // *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii*. 2012. No 1. S. 47–55.
3. Weibel C. Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne:EPFL, 2007.
4. Fukuda K., Weibel C. On f-vectors of Minkowski additions of convex polytopes // *Discrete and Computational Geometry*. 2007. No. 37. P. 503–516.
5. Angelov T.A. Nahozhdenie krajnih toчек summy dvuh politopov // *Vestn. Volgogr. gos. un-ta. Ser. 1, Mat. Fiz.* 2016. T. 37. No 6. S. 7–17.
6. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls // *ACM Transactions on Mathematical Software*. V. 4. No. 22. 1996. P. 469–483.
7. Kamenev G.K., Pospelov A.I. Poliedral'naya approksimaciya vypuklykh kompaktnyh tel metodami napolneniya // *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.* 2012. T. 52. No 5. S. 818–828.
8. Kamenev G.K. CHislennoe issledovanie effektivnosti metodov poliedral'noj approksimacii vypuklykh tel. M.: Vychislitel'nyj centr RAN, 2010.
9. Cigler G.M. Teoriya mnogogrannikov. M.: MCNMO, 2014.
10. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov*. M.: Nauka, 1969.
11. Bellman R. *Dinamicheskoe programmirovaniye*. M.: IIL, 1960.
12. Horn R., Dzhonson CH. *Matrichnyj analiz*. M.: Mir, 1989.
13. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz*. M.: Mir, 1973.
14. Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.
15. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.
16. Ibragimov D.N. Optimal'noe po bystrodejstviiyu upravlenie dvizheniem aerostata // *Elektron. zhurn. Tr. MAI*. 2015. No 83.
17. Ibragimov D.N. Approksimaciya mnozhestva dopustimyh upravlenij v zadache bystrodejstviya linejnoy diskretnoj sistemoj // *Elektron. zhurn. Tr. MAI*. 2016. No 87.
18. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
19. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.

**Моделирование и анализ данных 2019. Том 09. № 4.**  
Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:  
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий  
Тел.: +7 (499) 167-66-74  
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.  
Свидетельство о регистрации средств массовой информации  
ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN: 2219-3758  
ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 30.12.2019.  
Формат: 60\*90/8. Бумага офсетная.  
Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. п. 10,1. Усл.-изд. л. 8,9.  
Тираж 500 экз.