Моделирование и анализ данных
2021. Том 11. № 1. С. 20–32
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110102
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2021. Vol. 11, no. 1, pp. 20–32
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110102
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 519.858; 004.02

О методе построения линейной нестационарной дискретной системы с управлением полной размерности посредством изменения шага квантования

Ибрагимов Д.Н.*
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация,
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Новожилкин Н.М.**
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3308-8371
e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com

Работа посвящена рассмотрению метода, который позволяет свести стационарную систему с управлением неполной размерности к нестационарной периодической системе с управлением полной размерности. В работе доказана эквивалентность данных систем, предложен метод, позволяющий на основе оптимального управления модифицированной системы однозначно построить оптимальной управление для исходной системы. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: дискретная линейная система, задача быстродействия, множество управляемости.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18–08–00128-а.

Для цитаты:
Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М. О методе построения линейной нестационарной дискретной системы с управлением полной размерности посредством изменения шага квантования // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 20–32. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110102

****Ибрагимов Данис Наилевич,*** кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520, e-mail: rikk.dan@gmail.com

*****Новожилкин Никита Максимович,*** Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3308-8371, e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача быстродействия известна достаточно давно как задача оптимального управления с естественным функционалом качества – времени, затрачиваемого системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [10–12]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача не обладает какими-либо существенными особенностями, выделяющими ее из общей проблематики задач теории оптимального управления. Решение полученное на основе принципа максимума Понтрягина [10] гарантирует релейный характер управления для линейных систем.

В то же время системы с дискретным временем имеют ряд фундаментальных отличий от непрерывных систем при построении оптимального управления [13–15]. В то время как в непрерывном случае оптимизационная задача является задачей вариационного исчисления, в дискретном времени она представляет собой задачу выпуклого программирования. Данный факт определяет принципиально иной набор средств для построения оптимальных процессов в дискретном случае. Но не смотря на то, что посредством дискретного принципа максимума [15, 16] и метода динамического программирования [17] удается решить большую часть задач теории оптимального управления дискретными системами, для решения задачи быстродействия они оказываются неприменимыми в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний, неединственности оптимальной траектории и дискретного характера критерия качества управления – числа шагов необходимого для достижения фиксированного терминального состояния из заданного начального [5, 18].

В связи с чем оказывается актуальным поиск альтернативных подходов для решения поставленной задачи. На данный момент продемонстрировал свою эффективность метод, базирующийся на использовании множеств 0-управляемости [19] – множеств тех начальных состояний, из которых за конечное число шагов возможно перевести систему в начало координат посредством выбора допустимого управления. При этом доказано, что метод решения во многом зависит от ограничений, накладываемых на управление. В случае строго выпуклых ограничений для построения оптимального по быстродействию управления удается модифицировать известный принцип максимума [4, 5, 18].

Тем не менее существенным ограничением в использовании средств, представленных в [4, 5, 18], является предположение о непустой внутренности множества допустимых значений управления в фазовом пространстве, что эквивалентно тому, что размерность вектора управления должна совпадать с размерность вектора состояния. Зачастую в прикладных задачах оптимального управления это условие не выполняется.

В данной работе предложен метод построения нестационарной дискретной системы с периодической матрицей и множеством допустимых значений управлений полной размерности, которая эквивалентна исходной стационарной системе. Доказано, что оптимальное по быстродействию управление для нестационарной системы, построенное на основе методов из [4], является также оптимальным и для исходной системы. Эффективность полученных методов продемонстрирована на примере решения задачи оптимальной по быстродействию коррекции орбиты спутника.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система управления с дискретным временем и ограниченным множеством управлений (A,U):

$$y(k+1) = Ay(k) + v(k),$$
$$y(0) = x_0,\ v(k) \in U,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \tag{1}$$

где $y(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in U$ – вектор управлени, A – матрица системы. Предполагается, что $U \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое и компактное, $0 \in \mathrm{ri}U$, $\det A \neq 0$. Для системы (A,U) решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов N_{min}, за которое можно перевести систему из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат, а также построить процесс $\{y^*(k), v^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{min}}$, удолетворяющий условию $y^*(N_{min}) = 0$, который будем называть оптимальным. Известны два основных подхода к решению задачи быстродействия для системы (1). Модифицированный принцип максимума [5, 18] и метод динамического программирования Беллмана [17], основывающийся на проведении предварительной полиэдральной аппроксимации множества U [2]. Существенным ограничением в использовании вышеописанных подходов является выполнение включения $0 \in int U$, что с учетом предположения $0 \in \mathrm{ri}U$ эквивалетно условию

$$\dim U = n. \tag{2}$$

Тем не менее на практике условие (2) далеко не всегда оказывается справедливым, поскольку вектор управления, как правило, имеет размерность меньше размерности вектора состояния. В рамках данной статьи требуется построить нестационарную линейную дискретную систему эквивалетную системе (1), для которой выполнено условие (2)

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k),$$
$$x(0) = x_0,\ u(k) \in U, \tag{3}$$
$$0 \in \mathrm{int}U(k), \det A(k) \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Эквивалетность систем (1) и (3) понимается в том смысле, что для любого начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ оптимальный процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы (3) однозначно порождает оптимальный процесс $\{y^*(k), v^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{min}}$ системы (1). При этом оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для стационарной системы N_{min} и для нестационарной системы N_{min}^* могут отличаться.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ШАГА КВАНТОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим метод, который позволяет свести систему вида (1) к эквивалетной ей нестационарной линейной дискретной системе, удолетворяющей условию (2). Предложенный далее подход основывается на изменении шага квантования системы (1) таким образом, чтобы вектор состояния новой системы удолетворял условию

(2). Для разрешимости поставленной задачи будем предполагать, что система (1) управляема [1], т.е.

$$\mathrm{Lin}\ \{U + AU + \ldots + A^{n-1}U\} = \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

Будем полагать,что $\dim U = m < n$, множество U имеет вид параллелограмма:

$$\begin{aligned} &U = B\{v \in \mathbb{R}^m : v_j \in [u_{j,\min}; u_{j,\max}],\ j = \overline{1,m}\},\\ &B = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ rank\, B = m,\\ &u_{j,\min} < 0, u_{j,\max} > 0,\ j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{5}$$

В противоположном случае у множества U всегда существует подмножество вида (5), т.к $0 \in \mathrm{ri}U, \dim U = m$. Данный факт позволяет воспользоваться методами построения оптимальных полиэдральных оценок [2], позволяющими свести ограничения на управление в системе (1) к ограничениям вида (5).

В силу (5) для всех $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ верно представление

$$v(k) = \sum_{j=1}^{m} (v_j\ \ k) b_j,\ v_j(k) \in [u_{j,\min}, u_{j,\max}],\ j = \overline{1,m}.$$

Пусть $M \in \mathbb{N}$ такое, что $M \cdot m$ – наименьшее общее кратное для чисел m и n. Тогда для произвольного $k_0 \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ верно представление

$$y(M + k_0) = A^M y(k_0) + \sum_{i=0}^{M-1} A^{M-1-i} v(k_0 + i) =$$

$$= A^M y(k_0) + A^{M-1} b_1 v_1(k_0) + \ldots + A^{M-1} b_m v_m(k_0) + \ldots + b_1 v_1(k_0 + M - 1) +$$

$$+ \ldots + b_m v_m(k_0 + M - 1).$$

$$\begin{aligned} &x(k_0) = y(k_0),\\ &x(k_0 + 1) = A^M x(k_0) + u_1(k_0) + \ldots + u_n(k_0),\\ &x(k_0 + k + 1) = x(k_0 + k) + u_{kn+1}(k_0) + \ldots + u_{kn+n}(k_0),\\ &k = \overline{1, \frac{M \cdot m}{n} - 1},\quad \frac{M \cdot m}{n} > 1. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &u_{i\cdot m+j}(k_0) = A^{M-1-i} b_j v_j(k_0 + i),\\ &i = \overline{0, M-1},\ j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{6}$$

Также для произвольного $l = \overline{1, M \cdot m}$ через $i(l)$ и $j(l)$ обозначим такие числа, что

$$l = i(l)m + j(l),\ i(l) \in \{0, \ldots, M-1\},\ j(l) \in \{1, \ldots, m\},$$

т.е.

$$j(l) = (l-1) \bmod m + 1,$$

$$i(l) = \frac{l - j(l)}{m}.$$

С учетом (5) верно, что

$$u_l(k_0) \in \operatorname{conv}\,\{u_{j(l),\min} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}; u_{j(l),\max} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}\}.$$

Тогда

$$y(M+k_0) = A^M y(k_0) + u_1(k_0) + \ldots + u_{Mm}(k_0). \tag{7}$$

Определим набор векторов $\{x(k)\}_{k=k_0}^{\frac{Mm}{n}+k_0}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &x(k_0) = y(k_0),\\ &x(k_0+1) = A^M x(k_0) + u_1(k_0) + \cdots + u_n(k_0),\\ &x(k_0+k+1) = x(k_0+k) + u_{kn+1}(k_0) + \cdots + u_{kn+n}(k_0),\\ &k = \overline{1, \tfrac{M\cdot m}{n} - 1},\ \ \tfrac{M\cdot m}{n} > 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Определим следующую нестационарную линейную дискретную систему:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),\\ &x(0) = x_0, u(k) \in U(k), k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\\ &A(k) = \begin{cases} A^M, \dfrac{k\cdot n}{M\cdot m} \in \mathbb{N} \cup \{0\},\\ I, \dfrac{k\cdot n}{M\cdot m} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

$$U(k) = \sum_{l=l_0}^{n+l_0-1} \operatorname{conv}\,\{u_{j(l),\min} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}; u_{j(l),\max} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}\},$$

где

$$l_0 = n\cdot k\cdot\left(\operatorname{mod}\frac{M\cdot m}{n}\right) + 1.$$

Тогда система (9) согласно построениям является искомой эквивалетной системой. Сформулируем данный факт в виде следующей теоремы.

Теорема 1.

Пусть система (1) удолетворяет условию управляемости (4). Управляющие воздействия систем (1) и (9) удолетворяет равенству (6) для всех $k_0 \in \{0; M; 2M; 3M; \ldots\}$.

Тогда

$i)$ $\dim U(k) = n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$ii)$ $y(Mk) = x\left(\dfrac{M\cdot m}{n}\cdot k\right), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$iii)$ $y(k) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x(k^*) = 0$,

где

$$k^* = \begin{cases} \dfrac{k\cdot m}{n}, & \dfrac{k\cdot m}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\},\\ \left[\dfrac{k\cdot m}{n}\right] + 1, & \dfrac{k\cdot m}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Доказательство. Равенство в пункте *i*) следует из предположения (4) и определения множеств $U(k)$ в (9). Равенство *ii*) следует непосредственно из (7) и (8) в случае, когда $k_0 = 0$, и продолжения соотношений (8) для произвольного $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ по периодичности. Условие *iii*) вытекает из (6) и (7).

Следствие 1 *Пусть величина* n *кратна* m, *т.е.* $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. *Тогда система (9) стационарная.*

Доказательство. В силу того, что $M \cdot m$ – наименьшее общее кратное m и n, верно равенство

$$M \cdot m = n \quad \frac{M \cdot m}{n} = 1.$$

Тогда согласно (9) для всех $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

$$A(k) = A^M,$$

$$U(k) = \sum_{l=1}^{n} \text{conv } \{u_{j(l),\min} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}; u_{j(l),\max} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}\},$$

т.е. $A(k)$ *и* $U(k)$ постоянны.

Замечание 1.

Теорема 1 позволяет свести решение задачи быстродействия для системы (1) к решению аналогичной задачи для системы полной размерности (9). При этом переход от оптимального управления в системе (9) к оптимальному управлению в системе (1) может быть выполнен при помощи соотношений (6).

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1.

Пусть $n = 4, A = I \in R^{4\times4}, m = 3,$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_{j,\min} = -1, u_{j,\max} = 1, \ j = \overline{1,4}.$$

Заметим, что для данной системы не выполняется условие управляемости (4):

$$\text{Lin } \{U + AU + A^2U + A^3U\} \neq \mathbb{R}^4.$$

Покажем, что данное условие существенно для теоремы 1.

По определению $M = 4$, система (9) будет периодической с периодом равным $\frac{M \cdot m}{n} = 3$. В таком случае

$$U(0) = 2\text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$U(1) = 2\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$U(2) = 2\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Таким образом, размерность каждого множества $U(k)$ оказывается меньше размерности фазового пространства.

Пример 2.

Пусть $n = 6, m = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_{j,\min} = -1, u_{j,\max} = 1, j = \overline{1,4}.$$

В отличие от примера 1 для данных матриц A и B, условие (4) оказывается выполнено. Построим нестационарную систему эквивалетную системе (1) при помощи теоремы 1. По определению $M = 3$, система (9) будет периодической с периодом равным $\dfrac{M \cdot m}{n} = 2$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$A(k) = \begin{cases} A^3, & \dfrac{k}{2} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ I, & \dfrac{k}{2} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

$$U(0) = \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}14\\12\\13\\19\\9\\17\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-14\\-12\\-13\\-19\\-9\\-17\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}22\\21\\21\\20\\27\\13\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-22\\-21\\-21\\-20\\-27\\-13\end{pmatrix}\right\} + \mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}18\\15\\15\\15\\18\\10\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-18\\-15\\-15\\-15\\-18\\-10\end{pmatrix}\right\} + .$$

$$+\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}13\\12\\12\\12\\15\\8\\ \end{pmatrix};\begin{pmatrix}-13\\-12\\-12\\-12\\-15\\-8\\ \end{pmatrix}\right\}+\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\\1\\1\\ \end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\\-3\\-1\\-1\\ \end{pmatrix}\right\}+\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\\1\\2\\ \end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\\-3\\-1\\-2\\ \end{pmatrix}\right\},$$

$$+\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}+\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}+\mathrm{conv}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Можно заметить, что для всех $k \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, верно равенство $\dim U(k) = n = 6$.

5. ЗАДАЧА НАИСКОРЕЙШЕЙ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ СПУТНИКА

Задача коррекции спутника рассматривалась в различных монографиях [8, 9]. Необходимость управления движением спутником связана с тем, что в силу технических ограничений его не всегда удается вывести на расчетную орбиту, а также в связи с внешними факторами, которые оказывают негативное влияние на траекторию движения спутника. В результате спутник оказывается в некоторой малой окрестности расчетной траектории. Существуют различные подходы к построению математической модели движения спутника на круговой орбите, которые определяют задачу оптимизации. В [8, 9] все возмущающие факторы рассматриваются, как случайные процессы. В [8] изложено решение задачи коррекции спутника с критерием в форме квантили. В описанных работах число импульсов является фиксированным. Задача быстродействия для системы управления положением спутника на околокруговой орбите была рассмотрена в [4]. Движение спутника на круговой орбите описывается уравнениями:

$$\dot{r} = v_R,$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_T}{r},$$

$$\dot{v}_R = \frac{v_R^2}{r} - \frac{1}{r^2},$$

$$\dot{v}_T = -\frac{v_R v_T}{r},$$

где r – расстояние от начала координат до спутника, θ – угол поворота, v_R и v_T – радиальная и трансверсальная составляющие скорости спутника соответственно. Обозначим отклонения реальных значений вектора состояния от желаемых следующим образом:

$$\Delta r = r - r_0,$$
$$\Delta v_R = v_R - v_{R0},$$
$$\Delta v_T = v_T - v_{T0}.$$

Предполагая, что отклонения невелики, перейдем к линеаризованной системе

$$\Delta\dot{r} = \Delta v_R,$$
$$\Delta\dot{v}_R = \Delta r + 2\Delta v_T,$$
$$\Delta\dot{v}_T = -\Delta v_R.$$

Введем обозначение $z(t) = (\Delta r, \Delta v_R, \Delta v_T)^T$.

Управление подается импульсно через равные промежутки времени Δt, рассмотрим в качестве параметров системы вектор состояния в моменты времени $k\Delta t$, т.е. перед выполнением $(k+1)$-го корректирующего импульса, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $w_1(k), w_2(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}]$ – корректирующие импульсы, направленные вдоль радиальной и трансверсальной направляющих скоростей и исполняемые в момент времени $k\ddot{A}t$, $y(k) = z(k\ddot{A}t), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Получим конечно-разностные рекуррентные соотношения:

$$y(k+1) = \tilde{A}y(k) + \tilde{B}w(k),$$
$$y(0) = z_0,\ w(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [-\alpha_{max}; \alpha_{max}],\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\cos\Delta t + 2 & \sin\Delta t & -2\cos\Delta t + 2 \\ \sin\Delta t & \cos\Delta t & 2\sin\Delta t \\ \cos\Delta t - 1 & -\sin\Delta t & 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \sin\Delta t & -2\cos\Delta t + 2 \\ \cos\Delta t & 2\sin\Delta t \\ -\sin\Delta t & 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix},\ w(k) = \begin{pmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{pmatrix}.$$

$$B(k) = \begin{cases} \left(\tilde{A}\begin{pmatrix} \sin\Delta t \\ \cos\Delta t \\ -\sin\Delta t \end{pmatrix} \middle| \ \tilde{A}\begin{pmatrix} -2\cos\Delta t + 2 \\ 2\sin\Delta t \\ 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sin\Delta t \\ \cos\Delta t \\ -\sin\Delta t \end{pmatrix} \right), & k = 0, 2, 4, \ldots, \\ \left(\tilde{A}\begin{pmatrix} -2\cos\Delta t + 2 \\ 2\sin\Delta t \\ 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sin\Delta t \\ \cos\Delta t \\ -\sin\Delta t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\cos\Delta t + 2 \\ 2\sin\Delta t \\ 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$A(k) = \begin{cases} \tilde{A}^2, & k = 0, 2, 4, \ldots, \\ \tilde{A}, & k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

В итоге получим линейную нестационарную дискретную систему управления следующего вида:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)\tilde{u}(k),$$
$$x(0) = z_0,\ \tilde{u}(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [-\alpha_{max}; \alpha_{max}],\ k = 0,1,2,\ldots$$

Или же эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + u(k), \\ &x(0) = z_0,\ u(k) \in U(k), \\ &U(k) = B\left(k\right)[-\alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [-\alpha_{max}; \alpha_{max}],\ k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Для проведения численных расчетов используем следующие значения параметров:

$$\Delta t = 0.25,$$
$$\alpha_{max} = 0.0035,$$
$$z_0 = 10^{-2} \cdot (-3.42118; -1.14367; 2.3381)^T.$$

Наименьшее число шагов, необходимое для достижения начала координат, составляет $N_{min} = 4$. Вычисления проведем согласно методам разработанных в [4]. Представим полученные результаты в виде следующих таблиц:

Таблица 1

Оптимальная траектория

k	$x_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$x_3^*(k)$
0	$-3.42118 \cdot 10^{-2}$	$-1.14367 \cdot 10^{-2}$	$2.3381 \cdot 10^{-2}$
1	$-1.53386 \cdot 10^{-2}$	$-1.00378 \cdot 10^{-2}$	$1.0599 \cdot 10^{-2}$
2	$-0.495015 \cdot 10^{-2}$	$-0.73491 \cdot 10^{-2}$	$0.5069 \cdot 10^{-2}$
3	$-0.01017 \cdot 10^{-2}$	$-0.24105 \cdot 10^{-2}$	$0.0917 \cdot 10^{-2}$
4	0	0	0

Таблица 2

Оптимальное управление

k	$u_1^*(k)$	$u_2^*(k)$	$u_3^*(k)$
0	$0.14177 \cdot 10^{-2}$	$0.44627 \cdot 10^{-2}$	$0.03521 \cdot 10^{-2}$
1	$0.11641 \cdot 10^{-2}$	$0.45594 \cdot 10^{-2}$	$0.05720 \cdot 10^{-2}$
2	$0.15861 \cdot 10^{-2}$	$0.01538 \cdot 10^{-2}$	$0.2588 \cdot 10^{-2}$
3	$0.11938 \cdot 10^{-2}$	$0.50233 \cdot 10^{-2}$	$0.27515 \cdot 10^{-2}$

Таким образом мы получаем значение $N_{min} = 4$ для системы (10), что в силу теоремы 1 эквивалентно 6 шагам в исходной стационарной системе управления.

Литература

1. *Сиротин А.Н.* Управляемость линейных дискретных систем с ограниченным управлением и (почти) периодическими возмущениями, Автомат. и телемех., 2001, выпуск 5, С. 53–64
2. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление. // Вычислительные технологии. 2004. Т 9. № 4. С. 54–72.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2017. № 94.
5. *Ibragimov D.N.* On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
6. *КолмогоровА.Н., ФоминС.В.*Элементытеориифункцийифункциональногоанализа. М.: Физматлит, 2012.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966.
8. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
9. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т и др.* Спутниковые системы мониторинга. М.: МАИ, 2000.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
11. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
12. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
13. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
14. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
15. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
16. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. V. 4. No. 2. 1966. P. 263–275.
17. *Беллман Р.*Динамическоепрограммирование. М.: ИИЛ, 1960.
18. *Ibragimov D.N., Sirotin A.N.* On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
19. *Sirotin A.N., Formal'skii A.M.* Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.

On a Method for Constructing a Linear Nonstationary Discrete System with Full-Dimensional Control by Changing the Quantization Step

Danis N. Ibragimov *
Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Nikita M. Novozhilkin**
Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3308-8371
e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com

The method that allows one to reduce a stationary system with control of incomplete dimension to a non-stationary periodic system with control of full dimension is considered in this article. The paper proves the equivalence of these systems, and also that the optimal in terms of speed for a non-stationary system is also optimal for the original stationary system. A satellite attitude control system is considered as an example.

Keywords: linear discrete-time control system, performance problem, set of controllability.

Funding. The work was carried out with the financial support of the RFBR grant No. 18–08–00128-a.

For citation:
Ibragimov D.N, Novozhilkin N.M. On a Method for Constructing a Linear Nonstationary Discrete System with Full-Dimensional Control by Changing the Quantization Step. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 20–32. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110102 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Sirotin A.N. Controllability of linear discrete systems with bounded control and (almost) periodic disturbances // Automatica and telemechanica. 2001. No.5. P. 53–64.
2. Kostousova E.K. External polyhedral estimation of reachable sets in an “extended” space for linear multistage systems with integral constraints on control //Vichislitelnye Technologii. 2004. V 9. No. 4. P. 54–72.
3. Rokafellar P. Convex Analysis.// Mir, 1973.
4. Ibragimov D.N. Speed-optimal satellite orbit correction // Electron.Trudy. MAI. 2017. No. 94.

****Danis N. Ibragimov,*** PhD (mathematics and physics), Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520, e-mail: rikk.dan@gmail.com

*****Nikita M. Novozhilkin,*** Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3308-8371, e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com

5. Ibragimov D.N. On the speed problem for a class of linear autonomous infinite-dimensional systems with discrete time, bounded control, and a degenerate operator // Automatica and telemechanica. 2019. No. 2. P. 32–59.
6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of function theory and functional analysis. Fizmalit, 2012.
7. Danford N., Shvartz Dj. V. Linear operators. V. 2. Spectral theory. Self-adjoint operators in a Hilbert space//Mir, 1966.
8. Malishev V.V., Кibzun A.I. Analysis and synthesis of high-precision control of aircraft.// Mashinostroenie, 1987.
9. Malishev V.V., Кrasilchikov M.N., Bobronnikov V.T and other. Satellite monitoring systems. // MAI, 2000.
10. Pontryagin L.S.,Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko B.F. Mathematical theory of optimal processes. // Nauka, 1969.
11. Boltyansky V.G. Optimal control mathematical methods. // Nauka, 1969.
12. Moiseev N.N. Elements of the theory of optimal systems. // Nauka, 1975.
13. Evtushenko Y.G. Methods for solving extreme problems and their applications in optimization systems. // Nauka, 1982.
14. Boltyansky V.G. Optimal control of discrete systems. //Nauka, 1973.
15. Propoi A.I. Elements of the theory of optimal discrete processes. // Nauka, 1973.
16. Holtzman J.M., Halkin H. Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. V. 4. No. 2. 1966. P. 263–275.
17. Bellman R. Dynamic programming. // IIL, 1960.
18. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the speed problem for a class of linear autonomous infinite-dimensional systems with discrete time and bounded control. // Automatica and telemechanica. 2017. No. 10. P. 3–32.
19. Sirotin A.N., Formalsky A.M. Achievability and controllability of discrete systems with limited in magnitude and impulse control actions // Automatica and telemechanica. 2003. No. 12. P. 17–32.