МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 519.2

ГИПОТЕЗА БЕЙКЕРА-ГАММЕЛЯ-УИЛЛСА О СХОДИМОСТИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТАБЛИЦЫ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

А.О. Атращенко

Проиллюстрированы преимущества аппроксимаций Паде по сравнению с частичными суммами. Построена серия примеров, опровергающих гипотезу Шталя, а, следовательно, и Паде-гипотезу.

Illustrated are the benefits of Pade approximations in comparison with partial amounts. Built is a series of examples that refute the hypothesis Stahl, and, hence, the Pade-hypothesis.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Гипотеза Бейкера-Гаммеля-Уиллса, сходимость подпоследовательностей, элементы таблицы аппроксимаций Паде.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \qquad (1)$$

– степенной ряд (1), n и m – целые неотрицательные числа. По определению рациональная функция $[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ называется *аппроксимацией Паде* типа (*n, m*) степенного ряда 1, если

$$deg\, P_{n,m} \le n\,, deg\, Q_{n,m} \le m\,, Q_{n,m} \ne 0 \qquad (2)$$

и имеет место равенство

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = A_{n,m}z^{\,n+m+1} + \ldots, z \to 0\,. \qquad (3)$$

Обозначая j-й коэффициент Тейлора функции $Q_{n,m}f$ через $[Q_{n,m}f]_j$, непосредственно из определения получаем, что коэффициенты многочлена $Q_{n,m}(z) = q_{0,\mathrm{n,m}} + \cdot\cdot\cdot + q_{\mathrm{m,n,m}}z^n$, являющегося знаменателем аппроксимации $[n/m]_f$, удовлетворяют следующей линейной системе равенств

$$\begin{cases} [Q_{n,m}f]_{n+1} = q_{0,\mathrm{n,m}}f_{n+1} + \cdots + q_{\mathrm{m,n,m}}f_{n+1-m} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [Q_{n,m}f]_{n+m} = q_{0,\mathrm{n,m}}f_{n+m} + \cdots + q_{\mathrm{m,n,m}}f_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Легко видеть, что система (4) n линейных уравнений с n +1 неизвестными $q_{0,n,m}$, . . . , $q_{m,n,m}$ всегда имеет ненулевое решение. После нахождения знаменателя $Q_{n,m}$ аппроксимаций Паде числитель $P_{n,m}$ находится как n-я частичная сумма ряда $Q_{n,m}f$, а именно,

$$P_{n,m} = \sum_{j=0}^{n} [Q_{n,m}f]_j z^j$$

Таким образом, аппроксимация Паде $[n/m]_f$ определяется непосредственно по первым $n + m + 1$ коэффициентам $f_0, \dots, f_{n+m}$ степенного ряда (1), и основной вычислительный момент в ее нахождении – это решение линейной системы равенств (4). Подробнее об аппроксимациях Паде см.[1].

Множество всех аппроксимаций Паде обычно записывают в виде таблицы $\{[n/m]_f\}_{n,m=0}^{\infty}$ =

	$[1/0]_f$	$[2/0]_f$	…	$[n/0]_f$	…
$[0/1]_f$	$[1/1]_f$	$[2/1]_f$	…	$[n/1]_f$	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
$[0/m]_f$	$[1/m]_f$	$[2/m]_f$	…	$[n/m]_f$	…
…	…	…	…	…	…

Очевидно, что нулевая строка таблицы (когда фиксировано $m = 0$) – это обычная последовательность частичных сумм степенного ряда (1). В теории аппроксимаций Паде центральную роль играют вопросы сходимости элементов таблицы Паде – чаще всего строк, когда m фиксировано, $n \to \infty$, или диагонали таблицы Паде, когда $n = m \to \infty$. Проиллюстрируем преимущества аппроксимаций Паде, по сравнению с частичными суммами, на примере следующей простой функции

$$f(z) = \sqrt{1+z} \tag{5}$$

голоморфной в круге $|z| < 1$ и имеющей точку ветвления $z = -1$, лежащую на границе этого круга. Вторая точка ветвления функции (5) – это точка $z = \infty$. Хорошо известно, что последовательность частичных сумм функции (5) сходится к этой функции равномерно на компактах, лежащих в круге $|z| < 1$ (т.е. в круге до ближайшей особой точки), и расходится в любой точке вне замыкания этого круга. С другой стороны, известно, что диагональ $[n/n]_f(z) = \frac{P_{n,n}(z)}{Q_{n,n}(z)}$ таблицы аппроксимаций Паде функции (5) сходится к этой функции равномерно на компактах, лежащих в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, -1]$, т.е. во всей комплексной плоскости за исключением разреза $[-\infty, -1]$, соединяющего точки ветвления $z = \infty$ и $z = -1$ функции (5). Заметим также, что все нули знаменателей $Q_{n,n}, n = 1, 2, \dots$, лежат на разрезе $[-\infty, -1]$, который является наиболее естественным разрезом среди всех разрезов, соединяющих точки ветвления $z = \infty$ и $z = -1$ функции (5). Кроме того, $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, -1]$– это максимальная область сходимости диагонали $[n/n]_f(z)$. Это связано с тем, что если бы диагональ $[n/n]_f(z)$сходилась в большей области, то ее предельная функция давала бы голоморфное однозначное продолжение функции (5) в большую область, что невозможно, так как двузначная алгебраическая функция (5) не может быть однозначной ни в какой области, строго содержащей $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-\infty, -1]$.

2. ТЕОРЕМА МОНТЕССУ ДЕ БОЛОРА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

Наиболее ярким результатом о сходимости строк аппроксимаций Паде является следующая теорема Монтессу де Болора [2].

Теорема Монтессу де Болора (1902). *Пусть функция f мероморфна и имеет ровно m полюсов (с учетом кратностей) в круге $D = \{|z| < R\}$. Тогда:*

1°. При всех достаточно больших n аппроксимации Паде $[n/m]_f$ функции f имеют ровно m конечных полюсов, которые при $n \to \infty$ стремятся к полюсам функции f в круге D, причем каждый полюс f "притягивает" столько полюсов $[n/m]_f$, какова его кратность.

2°. Последовательность $[n/m]_f, n = 0, 1, \ldots$, сходится к функции f равномерно на компактах, лежащих в D и не содержащих полюсов функции f.

Частный случай $m = 0$ теоремы Монтессу де Болора совпадает с хорошо известным утверждением, что частичные суммы ряда Тейлора функции f, голоморфной в круге D, сходятся к f равномерно на компактах, лежащих в D.

Заметим, что предположение теоремы Монтессу де Болора о том, что функция f имеет в круге $D = \{|z| < R\}$ ровно m полюсов (с учетом кратностей) является существенным. Без этого предположения теорема становится неверной (полюса аппроксимаций перестают "понимать, куда им следует притягиваться и в результате могут образовывать множество, всюду плотное во всей комплексной плоскости"). В общем случае (без этого предположения) можно утверждать только лишь, что $[n/m]_f \xrightarrow{cap} f$, z ∈ D Определение сходимости по емкости будет дано ниже (см. определение (27)). Кроме того, В.И. Буслаев, А.А. Гончар, и С.П. Суетин [3] в 1983 году показали, что равномерная сходимость имеет место по подпоследовательности в некотором меньшем круге. Точнее, они доказали следующую теорему.

Теорема Буслаева–Гончара–Суетина (1983). *Для всякого $m \in \boldsymbol{N}$ существует постоянная c_m, зависящая только от m и такая, что для всякой голоморфной в круге $D = \{|z| < R\}$ функции f найдется подпоследовательность $\Lambda \subseteq N$, для которой $[n/m]_f \to f$ при $n \to \infty, n \in \Lambda$, равномерно внутри круга $|z| \leq c_m R$.*

В данной дипломной работе решен вопрос о численном значении постоянной c_m, фигурирующей в теореме Буслаева–Гончара–Суетина, при m = 2. В работе показано, что $c_2 \geq 10^{-6}$. Точнее, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для всякой функции f, голоморфной в круге $|z| < R$ существует подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f)$ такая, что $[n/2]_f$ равномерно стремится при $n \to \infty, n \in \Lambda$, к f в круге $|z| \leq 10^{-6}R$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $[n/2]_f(z) = \frac{P_n}{Q_n}(z)$. Непосредственно из определения аппроксимаций Паде имеем равенства

$$(Q_n f - P_n)(z) = B_n z^{n+3} + \cdots \tag{6}$$

$$(Q_{n+1} f - P_{n+1})(z) = B_{n+1} z^{n+4} + \cdots \tag{7}$$

Вычитая из равенства (6), умноженного на $Q_{n+1}(z)$, равенство (7), умноженное на $Q_n(z)$, получаем равенство

$$\begin{aligned}(P_{n+1}Q_n - P_n Q_{n+1})(z) &= (B_n z^{n+3} + \cdots)Q_{n+1}(z) - (B_n z^{n+4} + \cdots)Q_n(z) \\ &= A_n z^{n+3} + \cdots\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что степень многочлена, стоящего в левой части равенства (8), не превосходит $(n+1) + 2 = n + 3$, а в правой части стоит ряд по степеням z^{n+3} и выше. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства (8) получаем равенство

$$(P_{n+1}Q_n - P_n Q_{n+1})(z) = A_n z^{n+3} \tag{9}$$

Разделив равенство (9) на $(Q_n Q_{n+1})(z)$, получим равенство

$$\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right)(z)=\frac{A_n z^{n+3}}{(Q_n Q_{n+1})(z)} \tag{10}$$

Воспользовавшись равенством (10), представим $[n/2]_f(z)=\frac{P_n}{Q_n}(z)$ при $n\geq n_0$ в следующем виде

$$[n/2]_f(z)=\frac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)+\sum_{k=n_0}^{n-1}\left(\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}\right)(z)=\frac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)+\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{A_k z^{k+3}}{(Q_k Q_{k+1})(z)} \tag{11}$$

Из этого представления видно, что сходимость последовательности $\left\{[n/2]_f(z)\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{A_k z^{k+3}}{(Q_k Q_{k+1})(z)} \tag{12}$$

Напомним, что знаменатели Q_nимеют степень, не выше 2. Пусть ζ_nи τ_nнули многочлена Q_n.

Нормируем многочлены Q_nследующим образом:

$$Q_n(z)=\frac{(z-\zeta_n)(z-\tau_n)}{\max\{|\zeta_n|,1\}\max\{|\tau_n|,1\}}$$

А.А.Гончар доказал [4], что при такой нормировке радиус $R(f)$ голоморфности функции f вычисляется по следующей формуле

$$R(f)=(\varlimsup_{n\to\infty}|A_n|^{1/n})^{-1} \tag{13}$$

где A_n- коэффициенты ряда (12). Кроме того, А.А.Гончар доказал [4], что ряд (12) равномерно сходится к f на компактах, лежащих внутри множества $\{|z|<R(f)\}\backslash D_\varepsilon$ где множество D_ε можно покрыть объединением кругов, сумма радиусов которых не превосходит ε, где ε - произвольное наперед заданное положительное число. Таким образом,

$$[n/2]_f(z)-\frac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{A_k z^{k+3}}{(Q_k Q_{k+1})(z)},|z|<R(f),z\notin D_\varepsilon \tag{14}$$

Так как по условию теоремы функция f голоморфна в круге $|z|<1$, то $R(f)\geq 1$ и, следовательно, из формулы (13) имеем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}|A_n|^{1/n}\leq 1.$$

Легко видеть, что это неравенство влечет за собой предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A_n|}{(1+\delta)^n}=0,$$

где $\delta-$ произвольное сколь-угодно малое положительное число. Поэтому найдется подпоследовательность Λ_δ натуральных чисел такая, что при всех $n\in\Lambda_\delta$ *и всех* $k=0,1,\ldots$ выполняются неравенства

$$\frac{|A_{n+k}|}{(1+\delta)^{n+k}} \leq \frac{|A_n|}{(1+\delta)^n}, n \in \Lambda_\delta, k = 0,1, \dots \tag{15}$$

Фиксируем число $r(0 < r < 10^{-6})$ и предположим, что функция $[n/2]_f$ при всех $n \in \boldsymbol{N}$ имеет полюс ζ_n такой, что $|\zeta_n| \leq r$. Исходя из этого предположения, получим оценку снизу для r. Оценим правую часть равенства (14) при $n \in \Lambda_\delta$. Так как при $n \in \Lambda_\delta$ выполняются неравенства (15), то

$$\left|[n/2]_f(z) - \frac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k z^{k+3}}{(Q_k Q_{k+1})(z)}\right| =$$
$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{n+k} z^{n+k+3}}{(Q_{n+k} Q_{n+k+1})(z)}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A_n|(1+\delta)^k |z|^{n+k+3}}{|(Q_{n+k} Q_{n+k+1})(z)|}. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\frac{\left|[n/2]_f(z) - \frac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)\right|}{A_n z^{n+3}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^k |z|^k}{|(Q_{n+k} Q_{n+k+1})(z)|}, n \in \Lambda_\delta. \tag{17}$$

Фиксируем числа s, t, q такие, что $r < s < t < q^2 < \frac{2}{3}$ и положим

$$h = \frac{(t-s)(1-q)}{2} \tag{18}$$

Пусть τ_n – полюс $[n/2]_f$ (ноль многочлена Q_n), отличный от ζ_n. Обозначим через $D_{n,k}$ круг радиуса hq^k с центром в точке τ_{n+k}, т.е

$$D_{n,k} = \{|z - \tau_{n+k}| < hq^k\}.$$

Обозначим через φ функцию, ставящую в соответствие каждому комплексному числу z его модуль $|z|$, т.е. $\varphi(z) = |z|$. Заметим, что функция φ переводит круг $D_{n,k}$ в интервал

$$\varphi(D_{n,k}) = (|\tau_{n+k}| - hq^k, |\tau_{n+k}| + hq^k),$$

длина которого равна $2hq^k$. Следовательно, $\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} D_{n,k}\right)$ – это объединение интервалов, суммарная длина которых в силу определения (18) постоянной h не превосходит

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2hq^k = 2h\frac{1}{1-q} = t - s.$$

Поэтому на отрезке $[s,t]$ длины $t - s$ найдется точка ρ, не принадлежащая множеству $\varphi\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} D_{n,k}\right)$. Это означает, что в множестве $\bigcup_{k=0}^{\infty} D_{n,k}$ комплексной плоскости нет точек, по модулю равных ρ. Следовательно, окружность $\Gamma_\rho = \{|z| = \rho\}$ лежит в кольце $\{s \leq |z| \leq t\}$ и не пересекается с множеством $\bigcup_{k=0}^{\infty} D_{n,k}$. Поэтому при всех $z \in \Gamma_\rho$ *и всех* $k = 0,1, \dots$ имеем неравенства

$$|Q_{n+k}(z)| = |z - \zeta_{n+k}| \frac{|z - \tau_{n+k}|}{\max\{|\tau_{n+k}|, 1\}} \geq (\rho - r)\min\{hq^k, 1-\rho\} = (\rho - r)hq^k, z \in \Gamma_\rho, k = 0,1, \dots$$

Оценивая при помощи этих неравенств правую часть неравенства (17), при $z \in \Gamma_\rho$ и $n \in \Lambda_\delta$ получаем неравенство

$$\frac{\left|[n/2]_f(z) - \dfrac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)\right|}{A_n z^{n+3}}$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+\delta)^k \rho^k}{(\rho - r)^2 h^2 q^{2k+1}} = \frac{1}{(\rho - r)^2 h^2 q} \times \frac{1}{1 - \dfrac{(1+\delta)\rho}{q^2}}$$
$$= \frac{q}{(\rho - r)^2 h^2 (q^2 - (1+\delta)\rho)}, z \in \Gamma_\rho, n \in \Lambda_\delta.$$

Так как $s \le \rho \le t$, то

$$(\rho - r)^2 h^2 (q^2 - (1+\delta)\rho) \ge (s - r)^2 (q^2 - (1+\delta)t)$$

следовательно,

$$\frac{\left|[n/2]_f(z) - \dfrac{P_{n_0}}{Q_{n_0}}(z)\right|}{A_n z^{n+3}} \le \frac{q}{(s - r)^2 h^2 (q^2 - (1+\delta)t)}, z \in \Gamma_\rho, n \in \Lambda_\delta.$$

Так как $[n/2]_f = \frac{P_n}{Q_n}$, то умножая последнее неравенство на $Q_n(z)$ и учитывая, что при $z \in \Gamma_\rho$

$$|Q_n(z)| = (|z| + |\zeta_n|) \frac{|z| + |\tau_n|}{\max\{|\tau_n|, 1\}} \le (\rho + r)(\rho + 1) \le \ (t + r)(t + 1),$$

$$\left|\frac{(Q_n f - P_n)(z)}{A_n z^{n+3}}\right| \le \frac{q}{(s - r)^2 h^2 (q^2 - (1+\delta)t)} (t + r)(t + 1), z \in \Gamma_\rho, n \in \Lambda_\delta \tag{19}$$

Из определения аппроксимаций Паде (см. равенство (3)) видно, что функция, стоящая в левой части неравенства (19), голоморфна в круге $|z| < 1$. Поэтому по принципу максимума модуля для голоморфных функций неравенство (19) выполняется не только при $z \in \Gamma_\rho$, но и при всех z, лежащих внутри окружности Γ_ρи, в частности, при $z = \zeta_n$. Следовательно,

$$\left|\frac{(Q_n f - P_n)(\zeta_n)}{A_n \zeta_n^{n+3}}\right| \le \frac{q}{(s - r)^2 h^2 (q^2 - (1+\delta)t)} (t + r)(t + 1), n \in \Lambda_\delta.$$

Так как $\zeta_n -$ ноль многочлена Q_n, то последнее неравенство совпадает с неравенством

$$\left|\frac{P_n(\zeta_n)}{A_n \zeta_n^{n+3}}\right| \le \frac{q}{(s - r)^2 h^2 (q^2 - (1+\delta)t)} (t + r)(t + 1), n \in \Lambda_\delta \tag{20}$$

Подставляя точку $z = \zeta_n$ в равенство (9) и учитывая, что $Q_n(\zeta_n) = 0$, получаем равенство

$$-P_n(\zeta_n) Q_{n+1}(\zeta_n) = A_n \zeta_n^{n+3},$$

которое можно переписать в следующем виде

$$\left|\frac{P_n(\zeta_n)}{A_n \zeta_n^{n+3}}\right| = \frac{1}{|Q_{n+1}(\zeta_n)|}.$$

Отсюда и (20) имеем неравенство

$$\frac{1}{|Q_{n+1}(\zeta_n)|} \le \frac{q}{(s-r)^2 h^2 (q^2-(1+\delta)t)}(t+r)(t+1), n \in \Lambda_\delta,$$

или, что, то же самое, неравенство

$$\frac{(s-r)^2 h^2 (q^2-(1+\delta)t)}{q(t+r)(t+1)} \le |Q_{n+1}(\zeta_n)|, n \in \Lambda_\delta. \tag{21}$$

Так как

$$|Q_{n+1}(\zeta_n)| = |\zeta_{n+1}-\zeta_n|\frac{|\tau_{n+1}-\zeta_n|}{\max\{|\tau_{n+1}|,1\}} \le 2r(1+r),$$

то из неравенства (21) получаем неравенство

$$2r(1+r) \ge \frac{(s-r)^2 h^2 (q^2-(1+\delta)t)}{q(t+r)(t+1)}$$

Так как полученное неравенство не зависит от n, а число δсколь-угодно мало, то тем самым имеем неравенство

$$r \ge \frac{(s-r)^2 h^2 (q^2-t)}{2(1+r)q(t+r)(t+1)}$$

Отсюда и определения (18) постоянной h получаем неравенство

$$r \ge \frac{(s-r)^2(t-s)^2(1-q)^2(q^2-t)}{8(1+r)q(t+r)(t+1)}. \tag{22}$$

Покажем теперь, что параметры s, t *и* q можно подобрать таким образом, что правая часть неравенства (22) будет больше 10^{-6}. Заметим сначала, что при любых фиксированных параметрах t *и* q правую часть неравенства (22) можно максимизировать по параметру s, положив $s=\frac{r+t}{2}$. При таком s неравенство превращается в неравенство

$$r \ge \Phi(r,t,q), \textit{где}\ \Phi(r,t,q) = \frac{(t-r)^4(1-q)^2(q^2-t)}{2^7(1+r)q(t+r)(t+1)}. \tag{23}$$

Так как оцениваемая величина r окажется достаточно малой, то имеет смысл выбрать параметры t и q так, чтобы максимизировать величину

$$\Phi(0,t,q) = \frac{t^4(1-q)^2(q^2-t)}{2^7 q(t+1)}.$$

Приравнивая к нулю частные производные по t и q функции $\Phi(0,t,q)$ получаем следующую систему

$$\begin{cases} (3t^2(q^2-t)-t^3)(t+1)-t^3(q^2-t)=0 \\ (-2(1-q)(q^2-t)+(1-q)^2 2q)q-(1-q)^2(q^2-t)=0 \end{cases}$$

эквивалентную системе

$$\begin{cases} 3t^2+2(2-q)t-3q^2=0 \\ 3q^3-q^2-tq-t=0 \end{cases}$$

В качестве приближенного решения последней системы можно взять следующие параметры: $q = \frac{7}{9}, t = \frac{3}{4}q^2 = \frac{49}{108}$. При таких параметрах неравенство (23) приобретает следующий вид:

$$r \geq \frac{\left(\frac{49}{108} - r\right)^4 (1-\frac{7}{9})^2(\frac{49}{81} - \frac{49}{108})}{2^7(1+r)\frac{7}{9}\left(\frac{49}{108}+r\right)\left(\frac{49}{108}+1\right)} = \frac{\left(\frac{49}{108} - r\right)^4 \times \frac{4}{81} \times \frac{49}{324}}{2^7(1+r)\frac{7}{9}\left(\frac{49}{108}+r\right)\frac{157}{108}}. \tag{23}$$

Легко видеть, что из неравенства (24) следует, что $r \geq 10^{-6}$. Таким образом, теорема доказана.

3. ТЕОРЕМА ШТАЛЯ И КОНТРПРИМЕР К ГИПОТЕЗЕ ШТАЛЯ

Одним из наиболее глубоких результатов о сходимости диагонали таблицы аппроксимаций Паде является теорема Шталя [5], [6] о сходимости диагонали таблицы аппроксимаций Паде многозначных алгебраических функций. Напомним, что функция $f(z)$ называется алгебраической функцией, если она является решением уравнения

$$P_0(z)f^k(z) + P_1(z)f^{k-1}(z) + \cdots + P_k(z)f(z) = 0,$$

где $P_0(z), \ldots, P_k(z)$ – некоторые многочлены. Теорема Шталя может быть сформулирована как для вышеопределенных аппроксимаций Паде с центром в точке $z = 0$, так и для аппроксимаций Паде с центром в точке $z = \infty$. В последнем случае теорема Шталя становится более наглядной.

Напомним определение аппроксимаций Паде с центром в точке $z = \infty$.
Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \tag{25}$$

– степенной ряд, n и m – целые неотрицательные числа. По определению рациональная функция $[n/m]_f = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ называется *аппроксимацией Паде* типа $(n,\ m)$ степенного ряда 25, если выполнено условия 2 и имеет место равенство

$$(Q_{n,m}f \ - \ P_{n,m})(z) \ = \ \frac{A_{n,m}}{z^{\ m+1}} + \ldots, z \ \to \ \infty\,.$$

Перед формулировкой теоремы Шталя напомним также определение трансфинитного диаметра компакта K, лежащего в комплексной плоскости:

$$d(K) \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(\max_{z_1,\ldots,z_n\in K}\prod_{1\leq p<q\leq n}\left|z_p - z_q\right|\right)^{\frac{2}{(n-1)n}} \tag{26}$$

Теорема Шталя (1985). *Пусть* f – *функция, голоморфная в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки* $z = \infty$ *и допускающая аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость как многозначная алгебраическая функция. Тогда существует компакт* $F \subset \boldsymbol{C}$ *такой, что:*

1◦ Дополнение $\overline{\boldsymbol{C}}\backslash F$ *связно и функция* f *является однозначной голоморфной функцией в дополнении* $\overline{\boldsymbol{C}}\backslash F$. *Для всякого другого компакта* $K \subset \boldsymbol{C}$, *обладающего этим же свойством, выполняется неравенство* $d(K) \geq d(F)$.

2◦ Если $[n\backslash n]_f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ – *диагональ таблицы аппроксимаций Паде функции f, то все нули многочлена* Q_n *, за исключением o(n) нулей, стремятся к F, и* $[n\backslash n]_f(z) \xrightarrow{cap} f, n \to \infty, z \in \overline{\boldsymbol{C}}\backslash F$.

Обратим внимание на то, что в отличие от рассмотренного в §1 примера функции $f(z) = \sqrt{1+z}$, в котором все нули многочлена Q_n лежат на компакте F в общем случае нули многочлена Q_nне лежат на компакте F, а только лишь притягиваются к нему, причем *o(n)* нулей многочлена Q_n вообще неконтролируемы. Это является причиной того, что в утверждении 2◦ теоремы Шталя идет речь о сходимости по емкости аппроксимаций Паде, а не об их равномерной сходимости.

Напомним, что $[n\backslash n]_f(z) \xrightarrow{cap} f, n \to \infty, z \in \overline{\boldsymbol{C}}\backslash F$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ и для всякого компакта $K \in \overline{\boldsymbol{C}}\backslash F$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(\{z \in K: \big|[n\backslash n]_f - f\big| \ge \varepsilon\}\big) = 0 \tag{27}$$

Таким образом, для произвольных алгебраических функций равномерная сходимость может отсутствовать. Однако, рассмотренный в §1 пример простой функции $f(z) = \sqrt{1+z}$ наводит на мысль, что если на алгебраическую функцию наложить некоторые дополнительные ограничения, то по некоторой подпоследовательности такая равномерная сходимость может и возникнуть. В частности, 1996 году Г. Шталь высказал следующее предположение о сходимости диагонали таблицы аппроксимаций Паде с центром в точке *z=0* гиперэллиптических функций [7].

Гипотеза Шталя (1996). *Пусть функция f гиперэллиптична и голоморфна в круге* $\{|z| < R\}$. *Тогда найдется бесконечная подпоследовательность* $\Lambda = \Lambda(f)$ *натуральных чисел такая, что* $[n\backslash n]_f \to f$ *при* $n \to \infty, n \in \Lambda$, *равномерно на компактах, лежащих в D.*

Гипотеза Шталя является уточнением старой высказанной в 1961 году гипотезы Бейкера-Гаммеля-Уиллса, в которой функция f - это произвольная голоморфная в круге функция, т.е. в гипотезе Бейкера-Гаммеля-Уиллса в отличие от гипотезы Шталя нет условия гиперэллиптичости функции. Таким образом, если гипотеза Шталя неверна, то гипотеза Бейкера-Гаммеля-Уиллса тем более будет неверна.

Сам же Г. Шталь и доказал в [7] свою гипотезу в ситуации общего положения, т.е. при некоторых весьма общих предположениях на нули и полюсы рациональных функций r_1и r_2.

Тем не менее, оказалось, что в общем случае (в отсутствие дополнительных условий на нули и полюсы рациональных функций r_1и r_2) гипотеза Шталя неверна. Соответствующий пример, указанный В.И.Буслаевым [8], дается гиперэллиптической функцией

$$f(z) = \frac{-27 + 6z^2 + 3(9+\zeta)z^3 + \sqrt{81(3-(3+\zeta)z^3)^2 + 4z^6}}{2z(9 + 9z + (9+\zeta)z^2)}, \tag{28}$$

где $\zeta = \sqrt[3]{1} = \big(-1 + i\sqrt{3}\big)/2$, и выбрана та ветвь функции, для которой *f(0)=0.*

В.И.Буслаев показал, что в круге $\{|z| < R_f\}$ голоморфности гиперэллиптической функции (28) имеются три точки $z_1, z_2 = \zeta z_1, z_3 = \zeta^2 z_1$ такие, что $\left[3n + \frac{j}{3n} + j\right]_f (z_j) = \tilde{f}(z_j) \ne f(z_j) (n = 0,1,\dots, j = 1,2,3)$, где $\tilde{f}$ – другая ветвь гиперэллиптической функции f. Следовательно, в примере Буслаева нет равномерной сходимости к f ни по какой подпоследовательности диагональных аппроксимаций Паде в круге $\{|z| \le |z_1|\}$, где $|z_1|/R_f = 0.9841$.

Итак, гиперэллиптическая функция (28) опровергает гипотезу Шталя. Однако, по аналогии с теоремой Буслаева-Гончара-Суетина имеет смысл говорить о модифицированной гипотезе Шталя.

Модифицированная гипотеза Шталя. *Существует абсолютная постоянная с такая, что для всякой гиперэллиптической функции f,голоморфной в круге* $D = \{|z| < R\}$ *, найдется бесконечная подпоследовательность* $\Lambda = \Lambda(f)$ *натуральных чисел такая, что* $[n/n]_f \to f$ *при* $n \to \infty, n \in \Lambda$*, равномерно на компактах, лежащих в круге $ $D = \{|z| < cR\}$.

Легко видеть, что модифицированная гипотеза Шталя верна тогда и только тогда, когда *c>0*. С другой стороны, так как основной вариант гипотезы Шталя неверен, то *c<1*. Более того, как показывает пример Буслаева

$$c \leq 0{,}9841. \tag{29}$$

В данной дипломной работе решается следующая задача.

Задача. *Найти верхнюю оценку постоянной с, фигурирующей в модифицированной гипотезе Шталя, улучшающую оценку (29).*

Ответ на поставленную задачу содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Для постоянной с, фигурирующей в модифицированной гипотезе Шталя, имеет место верхняя оценка*

$$c \leq 0{,}9638. \tag{30}$$

Очевидно, что верхняя оценка (30) точнее оценки (29).

Доказательство теоремы 2. Заметим, что вышепоставленная задача будет решена, если удастся найти гиперэллиптическую функцию *f**, обладающую такими же свойствами, что и функция (28), но для которой соответствующее отношение$|z_1^*|/R_{f*}$ будет меньше, чем $|z_1|/R_f = 0.9841$. В этом случае будем иметь оценку $c \leq |z_1^*|/R_{f*}$, улучшающую оценку (29).

Будем искать гиперэллиптическую функцию *f** в следующем виде $f^* = f_p$, где

$$f_p(z) = \frac{-27 + 6z^2 - p\zeta(p^2\zeta^2 + \zeta)z^3 + \sqrt{9(27 + p\zeta^2(p^2\zeta + 3)z^3)^2 + 4z^6}}{2z(9 - 3p\zeta z + (p^2\zeta^2 + \zeta)z^2)}, \tag{31}$$

где $p \in \boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ некоторый отличный от нуля комплексный параметр, $\zeta = \sqrt[3]{1} = (-1 + i\sqrt{3})/2$ и выбрана та ветвь функции, для которой $f_p(0) = 0$.

Легко видеть, что при $p = -3\zeta^2$ функция f_p совпадает с найденной В.И.Буслаевым функцией (28). Заметим также, что функция f_p удовлетворяет равенству

$$zf_p(z) = \cfrac{z^2}{3 + pz + \cfrac{\zeta z^2}{3 + p\zeta^2 z + \cfrac{\zeta^2 z^2}{3 + p\zeta z + zf_p(z)}}}.$$

Следовательно, функция $f_p(z)$ имеет следующее разложение в периодическую (с периодом 3) непрерывную дробь

$$f_p(z)=\cfrac{z^2}{3+pz+\cfrac{\zeta z^2}{3+p\zeta^2 z+\cfrac{\zeta^2 z^2}{3+p\zeta z+\cfrac{z^2}{3+pz+\cdots}}}}. \tag{32}$$

Хорошо известно, что $[n/n]_{f_p}=\frac{P_n^p}{Q_n^p}$, где $\frac{P_n^p}{Q_n^p}$ −n-я подходящая дробь непрерывной дроби (32). По теореме Буслаева [8] непрерывная дробь (32) сходится к функции f_p всюду в комплексной плоскости, за исключением множества $\Gamma_p\cup E_p\cup\zeta E_p\cup\zeta^2 E_p$, где

$$\Gamma_p=\left\{z\in\mathbf{C}: z=-3[p(p^2+3\zeta^2)\pm 2it]^{-\frac{1}{3}}, 0\le t\le 1\right\},$$

$$E_p=\{z\in\mathbf{C}\backslash\Gamma: (p^2+\zeta^2)z^2-3pz+9=0, |z^2(3+p\zeta^2 z)| > |(p^3+2p\zeta^2)z^3+3\zeta(\zeta+1)z^2+27|\}.$$

В точках множества Γ_p сходимость непрерывной дроби (32) отсутствует, в точках множества $\zeta^j E_p,\ j=0,1,2$, последовательность подходящих дробей $[3n+j/3n+j]_f, n=1,2,...$, сходится к $\widetilde{f_p}$ − другой, отличной от f_p ветви гиперэллиптической функции.

Придавая комплексному параметру $p\in\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ конкретные различные значения, численно найдем при помощи написанной вычислительной программы зависящие от p величины: $m_p=|z_p^1|$ −расстояние от нуля до точки $z_p^1\in E_p$, $M_p=\min_{z\in\Gamma_p}|z|$ −расстояние от нуля до компакта Γ_p.

Из полученных данных образуем таблицу:

p	$\boldsymbol{m_p/M_p}$
0,4 + 2,598i	0,9768
0,23131 + 2,598i	0,981
1,5 + 2,598i	0,9841
1,5 + 2i	0,9875
1,5 + 6,235i	0,9945
0,8 + 2,598i	0,9788
0,56321 + 2,598i	0,9774
0,3333 + 2,598i	0,9767
0,569 + 0,2568i	2,658
0,569 + 0,2568i	2,658
2356 + 0,2365i	1
5,004 + 0,2365i	1,006
0,3111 + 3,345i	0,9851
0,3111 + 2,345i	0,9757
0,3111 + 2,222i	0,9752
0,3111 + 2,1112i	0,9752
0,6111 + 2,1112i	0,9712
0,5111 + 2,1112i	0,9695
0,4111 + 2,1112i	0,9679
0,211 + 2,1112i	0,9824
0,461 + 2,1112i	0,9687
0,413 +2,11i	0,968

0,411 + 2,13i	0,9684
1,411 + 1,119i	1,045
1,411 + 0,119i	1,527
1,411 + 12,119i	0,9986
1,411 - 9,119i	0,9995
0,4432 +2,111i	0,9684
0,32 +2,111i	0,9745
0,352 +2,111i	0,9722
0,552 +2,111i	0,9702
3	1,032
0,455 +1,9i	**0,9638**

В.И.Буслаев [8] показал, что при $m_p < M_p$, ни *z=0*, ни меньший по модулю корень многочлена, стоящего в правой части (32), не являются полюсами функции f_p (так как числитель обращается в ноль в этих точках) и радиус R_{f_p} голоморфности функции f_pсовпадает с M_p.

Так как в точках z_p^1, z_p^2, z_p^3 нет сходимости к f_pаппроксимаций Паде ни по какой подпоследовательности, отсюда следует, что при $m_p < M_p$ функция f_p опровергает гипотезу Шталя и, следовательно,

$$c \leq \min_p m_p / R_{f_p} = \min_p m_p / M_p = m_{p_0} / M_{p_0} = 0{,}9638$$

где $p_0 = 0{,}455 + 1{,}9i$. Таким образом, полученная верхняя оценка (30) постоянной c точнее оценки (29). Полученная оценка достигается на гиперэллиптической функции f_p, задаваемой равенством (31) при $p = 0{,}455 + 1{,}9i$. Что и требовалось доказать.

Благодарность

Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Виктору Ивановичу Буслаеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986.
2. de Montessus de Ballore R. *Sur les fractions continues algebriques* . – Bull. Soc. Math. France, 1902, v. 30, pp. 28-36.
3. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П., *О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде* . – Матем. сб., 1983, т.120, №4, с.540-545.
4. Гончар А.А., *Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций*. – Матем. сб., 1981, т. 115 (157), 4, с. 590-613.
5. Stahl H. *Orthogonal polynomials with complex valued weight function.* I,II . – Constr. Approx., 1986, vol. 2, pp. 225-240, 241-251.
6. Stahl H. *Extremal domains associated with an analytic function.* I,II . – Complex Variables Theory Appl., 1985, vol. 4, pp. 325-338, 339-354.
7. Stahl H. *Diagonal Pade Approximants to Hyperelliptic functions.* – Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), Spec. Iss. 1996, pp. 121-193.
8. Буслаев В.И. *О гипотезе Бейкера-Гаммеля-Уиллса в теории аппроксимаций Паде* . – Матем. сб., т. 193, №6, 2002, с.25-38.

Работа поступила 26.06.2014