

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НОВОГО ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ ПРОЦЕДУР ТЕСТИРОВАНИЯ¹

КУРАВСКИЙ Л. С., Московский городской психолого-педагогический университет, Москва

МАРМАЛЮК П. А., Московский городской психолого-педагогический университет, Москва

АЛХИМОВ В. И., Московский городской психолого-педагогический университет, Москва

ЮРЬЕВ Г. А., Московский городской психолого-педагогический университет, Москва

Предложен новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов, основанный на представлении движения взгляда испытуемого по поверхности стимулов с помощью одной из наиболее общих разновидностей случайных процессов и технологиях его последующего анализа. Особое внимание уделено математическому обоснованию рассмотренных методов. В качестве иллюстрации приведен пример практического применения полученных результатов для выявления уровня математической подготовки студентов и школьников.

Ключевые слова: тестирование, марковский процесс, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, уравнения Колмогорова.

1. Введение

Компьютерное тестирование в настоящее время широко используется в медицине, психологии и образовании с целью диагностики, определения уровня компетенций и пригодности испытуемых для выполнения тех или иных функций, включая контроль качества обучения. Качество тестирования и достоверность его результатов в значительной степени зависят от технологий проведения тестов, которые в последние десятилетия стали предметом активных научных исследований.

В первое время тесты строились на основе классической теории тестирования (Gulliksen, 1950; Gregory, 2007; Тюменева, 2007), в основе которой лежит теория погрешности измерений, заимствованная из физики: полагалось, что измеряемые характеристики имеют некоторые «истинные» значения, искажаемые случайными и систематическими погрешностями. Этот подход получил определенное распространение, однако его практическому применению препятствует ряд существенных недостатков:

- возникают проблемы при сравнении сходных особенностей испытуемых, выявленных с помощью разных методик;
- не решается проблема валидности;
- тестовые баллы становятся недостаточно надежными в областях экстремальных значений;
- технология в целом недостаточно надежна и универсальна.

Для преодоления указанных проблем была разработана новая технология тестирования, основанная на латентно-структурном анализе и до сих пор называемая *современной теорией тестирования* (Item Response Theory – IRT) (Rasch, 1980; Baker, 2001; Тюменева, 2007). В русскоязычной литературе также используются и другие варианты ее названия: теория ответов на вопросы, стохастическая теория тестов, математическая теория измере-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта №10-06-00423 а..

ний, теория латентных черт, теория характеристических кривых заданий, теория моделирования и параметризации педагогических тестов и т.д. Основная концепция данного подхода, предложенного Г. Рашем в 1960 году, предполагает, что вероятность правильного ответа на задание определяется разностью уровня знаний или способностей и трудности теста. В зависимости от условий прикладной задачи на практике используются и другие, более сложные модели, построенные на базе данной концепции (Rasch, 1980; Wright, Masters, 1982; Wright, Stone, 1979).

В рамках технологии IRT может быть реализована концепция *адаптивного тестирования*, согласно которой испытуемому с определенной текущей расчетной оценкой уровня знаний или способностей на каждом шаге тестирования вычисляются и предлагаются задания со сложностью, обеспечивающей наибольшую дифференциацию результатов для разных категорий испытуемых.

Однако при применении технологии IRT возникают следующие проблемы:

- «статичность» оценок: игнорирование того факта, что результат тестирования вследствие усталости испытуемых и других факторов может, вообще говоря, существенно изменяться со временем, принимая различные значения в процессе сеанса тестирования;
- невозможность учета времени, затрачиваемого на решение тестовых задач, при построении расчетных оценок;
- необходимость выполнения достаточно большого числа заданий для получения оценок с приемлемой точностью;
- сравнительно сложная для практической реализации процедура оценки точности результата, связанная с применением метода максимального правдоподобия и расчетом доверительных интервалов.

Указанные проблемы сделали актуальными поиск и разработку новых принципов построения технологий тестирования. Одним из наиболее перспективных результатов в этой области стал новый подход к адаптивному тестированию (Куравский и др., 2003, 2005, 2010, 2012; Куравский, Юрьев, 2011 а, б; 2012 а, б; Kuravsky, Malykh, 2000), построенный на использовании *обучаемых структур в форме марковских моделей* с дискретным и непрерывным временем. Его особенностями, обеспечивающими преимущества перед аналогичными способами тестирования, являются:

- выявление и использование при построении расчетных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями теста;
- возможность учета при построении расчетных оценок времени, затрачиваемого на решение тестовых задач;
- возможность исследования временной динамики знаний или способностей как в дискретной, так и в непрерывной временной шкале;
- меньшее по сравнению с другими подходами число заданий, которые следует предъявлять испытуемому для получения оценок знаний или способностей с заданной точностью, что ускоряет процесс тестирования;
- получение распределения вероятностей возможных результатов теста в качестве конечного результата;
- развитая техника идентификации параметров моделей.

Одной из наиболее серьезных проблем, возникающих в процессе тестирования, является проявление в истории ответов испытуемого влияния искажающих результаты *артефактов*, обусловленных подсказками, угадыванием и другими формами некорректного целена-

правленного вмешательства в процедуру испытаний. Разработанная технология адаптивного тестирования на базе марковских моделей позволяет бороться с этим явлением, устраняя артефакты на основе сравнения наблюдаемых и прогнозируемых результатов ответов на вопросы для разных уровней способностей испытуемых (Куравский, Юрьев, 2012а,б). В качестве инструмента для сравнения используется приспособленный для решения задачи тестирования *многомерный непрерывный фильтр Калмана* (Тихонов и др., 2009; Шахтарин, 2010) – нестационарная система с обратной связью, включающая в себя как составную часть формирующий фильтр, воспроизводящий идеализированную модель поведения.

Второе перспективное направление в развитии технологий тестирования связано с применением факторных моделей (Панфилова, 2012). Его преимуществами по сравнению с другими подходами являются отсутствие проблемы оценки сложности заданий тестов, а также возможность описания структуры способностей методами структурного моделирования. Устранение артефактов тестирования в этом случае обеспечивается *многомерным цифровым фильтром Калмана*. Процедура тестирования является неадаптивной. Этот подход, как и предыдущий, учитывает влияние фактора времени на результаты тестирования и обеспечивает уменьшение времени прохождения процедуры испытаний.

На основе рассмотренных выше технологий тестирования, использующих марковские и факторные модели, разработаны системы поддержки принятия решений (Куравский и др., 2012; Панфилова, 2012), которые ускоряют процесс тестирования, оптимизируя предъявление тестовых заданий. Диагностические выводы строятся на основе уточняющихся в процессе тестирования вероятностных оценок принадлежности испытуемых к различным категориям. Подобные инструменты дают практикующему специалисту дополнительную информацию для анализа и, в случае марковских моделей, предоставляют рекомендации по выбору следующего теста, обладающего, по сравнению с прочими, наибольшей для данного испытуемого дифференцирующей способностью. Такие рекомендации, не являясь обязательными и не лишая специалиста возможности получения собственного опыта, направляют его по наиболее эффективному и надежному пути. Следует отметить, что сам процесс тестирования при этом не становится полностью автоматическим в силу многокомпонентности процедуры оценки способностей и наличия дополнительных неформализуемых критериев.

Все рассмотренные выше технологии тестирования объединяет общий признак: итоговые оценки обычно определяются только по формальным результатам выполнения заданий, предъявляемых испытуемому, без анализа хода его рассуждений и динамики изменения состояния человека в процессе выполнения теста. Это существенно ограничивает возможности измерительной процедуры, что обусловлено, во-первых, ее, как правило, значительной продолжительностью, изменяющей психофизиологическое состояние испытуемого и его способности справляться с заданиями, и, во-вторых, упомянутой выше проблемой некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний, искажающего вычисляемые баллы.

Перспективы преодоления этих проблем, по мнению многих экспертов, связаны с включением в процесс тестирования методов современной экспериментальной психологии и, в частности, средств анализа глазодвигательной активности (Барабанщиков и др., 2009). Среди разработанных в этой области общих подходов следует отметить:

- анализ традиционных параметров траекторий движений глаз (общего времени чтения, усредненных характеристик фиксаций, прогрессивных и регрессивных саккад и т. д.) (Rayner, 1998; Безруких и др., 2009);

- анализ специальных показателей траекторий (соотношений времен пребывания взора в различных зонах стимула, частот посещений различных зон стимула и переходов от одной зоны к другой, степени следования испытуемыми различным пространственным стратегиям и т.д.) (Vigneau et al., 2006; Хохлова, 2011; Мармалюк, Звонкина, 2012; Patalano et al., 2010);

- анализ символьных последовательностей с использованием метрики различий (Brandt, Stark, 1997; Myers, Schoelles, 2005);

- методы, основанные на исследовании структуры и различных манипуляциях с матрицами переходных вероятностей цепей Маркова (Ellis, Stark, 1986; Ponsoda et al., 1995; Jansen et al., 2007; Salvucci, Anderson, 2001; Simola et al., 2008; Dayan, 1993; Hayes et al., 2011);

- методы, построенные на использовании скрытых марковских моделей (Rabiner, 1989; Cagli et al., 2008; Salvucci, Anderson, 2001; Simola et al., 2008; van der Lans et al., 2008).

Наиболее перспективными для анализа глазодвигательной активности испытуемых при прохождении тестовых процедур представляются так называемые *матрицы представления приемника* (*SR*-матрицы), вычисляемые как пределы сумм степенных последовательностей матриц переходных вероятностей цепей Маркова (Dayan, 1993; Hayes et al., 2011).

Несмотря на отдельные примеры практического применения, развитие и распространение перечисленных выше методов, включая анализ *SR*-матриц, сдерживается рядом ограничений, наиболее существенными из которых являются слабые возможности для исследования временной динамики движения глаз, неразвитый математический аппарат, низкая степень дифференциации проблемных категорий испытуемых и недостаточная универсальность.

В этой работе предложен новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов, основанный на представлении движения взора испытуемого по поверхности стимулов с помощью одной из наиболее общих разновидностей случайных процессов и технологиях его последующего анализа. Особое внимание уделено математическому обоснованию рассмотренных методов. В качестве иллюстрации приведен пример практического применения полученных результатов для выявления уровня математической подготовки студентов и школьников.

2. Математические аспекты нового подхода к построению тестов

Будем полагать, что испытуемым предъявляется плоский стимул прямоугольной формы, представляющий содержательную информацию по определенной тематике. Испытуемые разделены на несколько заранее известных категорий, отражающих уровень знаний или компетенций по данной тематике. Считая, что для каждой из этих категорий имеется идентифицированная по результатам наблюдений оценка распределения вероятностей пребывания взора по поверхности стимула, поставим задачу распознавания категории $\omega \in \Omega$, к которой принадлежит испытуемый, по данным о движении его взора по поверхности стимула.

Классификация в указанной постановке обеспечивается решением рассмотренных далее следующих подзадач:

- выбора математического представления движения взора испытуемого по поверхности стимула;

- идентификации распределения вероятностей пребывания взора по поверхности стимула по результатам наблюдений для всех рассматриваемых категорий испытуемых;

- оценки вероятности наблюдаемой траектории движения взора по поверхности стимула при условии принадлежности к каждой из заданных категорий испытуемых.

Пусть движение взора по поверхности стимула описывается векторной непрерывной случайной функцией времени $\mathbf{U}(t)=(U_1(t), U_2(t))$, где $t \in T$. Плотность вероятности $p(\mathbf{u}, t)$, характеризующая распределение значений функции $\mathbf{U}(t)$, определяется при этом как $p(\mathbf{u}, t) d\mathbf{u} = P\{\mathbf{u} \leq \mathbf{U}(t) < \mathbf{u} + d\mathbf{u}\}$, где $\mathbf{u}=(u_1, u_2)=(x, y)$, а $d\mathbf{u}$ – элемент объема в \mathbf{R}^2 .

Будем полагать, что рассматриваемая случайная функция принадлежит к достаточно общему классу *марковских процессов* или *процессов без последействия*, для которых в любые моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ выполняется условие $p(\mathbf{u}_m, t_m | \mathbf{u}_{m-1}, t_{m-1}; \dots; \mathbf{u}_0, t_0) = p(\mathbf{u}_m, t_m | \mathbf{u}_{m-1}, t_{m-1})$. Такие процессы полностью определяются начальным распределением $p(\mathbf{u}_0, t_0)$ и распределением *переходных вероятностей* $p(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0)$. Это распределение в случае непрерывных процессов удовлетворяет *уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_j} (a_j p) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} (b_{jk} p)$$

с начальным условием $p(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0) |_{t=t_0} = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$. Интенсивности рассматриваемых марковских процессов $a_j(\mathbf{u}, t)$ и $b_{jk}(\mathbf{u}, t)$ называются, соответственно, *коэффициентами сноса и диффузии*.

Опуская для удобства записи знак суммы при наличии повторяющихся индексов в суммируемых выражениях, перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[- \frac{\partial}{\partial u_i} a_i + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} b_{ij} \right] p.$$

Обозначив $\left[a_i - \frac{\partial}{\partial u_j} b_{ij} \right] p$ как J_i , это уравнение можно представить в более удобной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (1)$$

где $\mathbf{J}=(J_1, J_2)=(J_x, J_y)$ есть *плотность потока вероятностей*.

Можно показать, что составляющие плотности потока вероятностей представляются следующими выражениями:

$$J_x = \left(a_x - \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial b_{xy}}{\partial y} - b_{xx} \frac{\partial \ln p}{\partial x} - b_{xy} \frac{\partial \ln p}{\partial y} \right) p,$$

$$J_y = \left(a_y - \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial b_{yx}}{\partial x} - b_{yy} \frac{\partial \ln p}{\partial y} - b_{yx} \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right) p.$$

Следует отметить, что, в общем случае, $b_{xy} \neq b_{yx}$.

Введя обозначения:

$$\lambda_x = a_x - \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial b_{xy}}{\partial y} - b_{xx} \frac{\partial \ln p}{\partial x} - b_{xy} \frac{\partial \ln p}{\partial y},$$

$$\lambda_y = a_y - \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial b_{yx}}{\partial x} - b_{yy} \frac{\partial \ln p}{\partial y} - b_{yx} \frac{\partial \ln p}{\partial x},$$

компоненты плотности потока вероятностей можно представить в виде:

$$I_x = \lambda_x p, \quad I_y = \lambda_y p.$$

Заметим, что, учитывая медленный характер изменения логарифмической функции, на практике для оценки λ_x и λ_y можно использовать упрощенные формулы, позволяющие в первом приближении считать эти величины не зависящими от p :

$$\lambda_x = a_x - \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial b_{xy}}{\partial y},$$

$$\lambda_y = a_y - \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial b_{yx}}{\partial x}.$$

Для вычисления приближенного решения приведенного выше уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова проведем дискретизацию замкнутой области стимула ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) прямоугольной сеткой, равномерной вдоль каждой из осей (рис. 1).

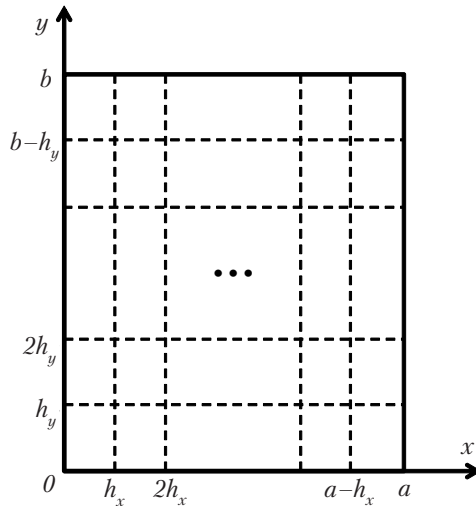


Рис. 1. Дискретизация замкнутой области стимула прямоугольной сеткой

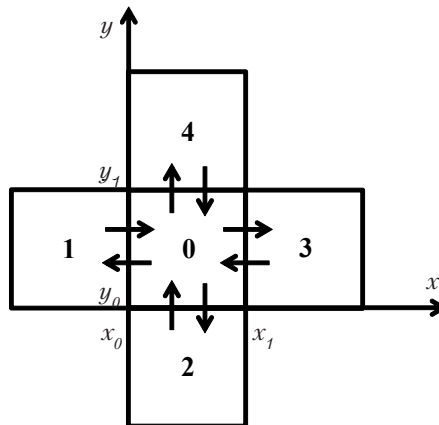


Рис. 2. Произвольная внутренняя ячейка прямоугольной сетки

На границе произвольной внутренней ячейки прямоугольной сетки (рис. 2) выполняются следующие условия (верхние индексы обозначают номера ячеек):

$$\begin{aligned} J_x(x_0, y, t) &= J_x^0(x_0, y, t) - J_x^1(x_0, y, t), & y_0 \leq y \leq y_1; \\ J_x(x_1, y, t) &= J_x^0(x_1, y, t) - J_x^3(x_1, y, t), & y_0 \leq y \leq y_1; \\ J_y(x, y_0, t) &= J_y^0(x, y_0, t) - J_y^2(x, y_0, t), & x_0 \leq x \leq x_1; \\ J_y(x, y_1, t) &= J_y^0(x, y_1, t) - J_y^4(x, y_1, t), & x_0 \leq x \leq x_1. \end{aligned}$$

Усредним правую и левую части уравнения непрерывности (1) по площади произвольной внутренней ячейки (величины, полученные путем усреднения, далее обозначены чертой сверху):

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) dx dy,$$

где $\bar{p} = \frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} p dx dy.$

Полученное уравнение после интегрирования принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \left[\int_{y_0}^{y_1} dy (J_x(x_1, y, t) - J_x(x_0, y, t)) + \right. \\ &+ \left. \int_{x_0}^{x_1} dx (J_y(x, y_1, t) - J_y(x, y_0, t)) \right] = -\frac{1}{x_1 - x_0} [\bar{J}_x(x_1, t) - \bar{J}_x(x_0, t)] - \\ &- \frac{1}{y_1 - y_0} [\bar{J}_y(y_1, t) - \bar{J}_y(y_0, t)], \end{aligned} \tag{2}$$

где, согласно формуле среднего значения,

$$\begin{aligned} \bar{J}_x(x_0, t) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} J_x(x_0, y, t) dy = \bar{J}_x^0(x_0, t) - \bar{J}_x^1(x_0, t), \\ \bar{J}_x(x_1, t) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} J_x(x_1, y, t) dy = \bar{J}_x^0(x_1, t) - \bar{J}_x^3(x_1, t), \\ \bar{J}_y(y_0, t) &= \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} J_y(x, y_0, t) dx = \bar{J}_y^0(y_0, t) - \bar{J}_y^2(y_0, t), \\ \bar{J}_y(y_1, t) &= \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} J_y(x, y_1, t) dx = \bar{J}_y^0(y_1, t) - \bar{J}_y^4(y_1, t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_x^k(x_j, t) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} J_x^k(x_j, y, t) dy = \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} \lambda_x^k(x_j, y, t) p^k(x_j, y, t) dy = \\ &= \frac{\lambda_x^k(x_j, y^*, t)}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} p^k(x_j, y, t) dy = \lambda_x^k(x_j, y^*, t) \bar{p}^k(x_j, t), \quad y_0 \leq y^* \leq y_1, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1, 3. \end{aligned}$$

Аналогично: $\bar{J}_y^l(y_j, t) = \lambda_y^l(x^*, y_j, t) \bar{p}^l(y_j, t), \quad x_0 \leq x^* \leq x_1, \quad l = 0, 2, 4.$

Подставляя выражения (3) в уравнение (2) и вводя обозначения

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(t) &= -\frac{\lambda_x^0(x_0, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \alpha_2(t) &= -\frac{\lambda_y^0(x^*, y_0, t)}{y_1 - y_0}, \\
 \alpha_3(t) &= \frac{\lambda_x^0(x_1, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \alpha_4(t) &= \frac{\lambda_y^0(x^*, y_1, t)}{y_1 - y_0}, \\
 \beta_1(t) &= -\frac{\lambda_x^1(x_0, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \beta_2(t) &= -\frac{\lambda_y^1(x^*, y_0, t)}{y_1 - y_0}, \\
 \beta_3(t) &= \frac{\lambda_x^1(x_1, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \beta_4(t) &= \frac{\lambda_y^1(x^*, y_1, t)}{y_1 - y_0}, \\
 \bar{p}_1^0(t) &= \bar{p}^0(x_0, t), & \bar{p}_2^0(t) &= \bar{p}^0(y_0, t), \\
 \bar{p}_3^0(t) &= \bar{p}^0(x_1, t), & \bar{p}_4^0(t) &= \bar{p}^0(y_1, t), \\
 \bar{p}_1^1(t) &= \bar{p}^1(x_0, t), & \bar{p}_2^1(t) &= \bar{p}^1(y_0, t), \\
 \bar{p}_3^1(t) &= \bar{p}^1(x_1, t), & \bar{p}_4^1(t) &= \bar{p}^1(y_1, t),
 \end{aligned}$$

получим *обыкновенное дифференциальное уравнение* для произвольной внутренней ячейки прямоугольной сетки (рис. 2):

$$\frac{d\bar{p}^0(t)}{dt} = -\sum_{k=1}^4 \alpha_k(t)\bar{p}_k^0(t) + \sum_{l=1}^4 \beta_l(t)\bar{p}_l^1(t).$$

Уравнения для граничных ячеек сетки получаются путем удаления из данного уравнения слагаемых, относящихся к отсутствующим элементам.

Таким образом, поиск приближенного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова сводится к решению задачи Коши для системы приведенных выше обыкновенных дифференциальных уравнений относительно плотности вероятности пребывания взора на поверхности стимула, усредненной по площади *ячеек*. Если, умножив каждую усредненную плотность вероятности на площадь ячейки, рассматривать каждую ячейку прямоугольной сетки размерностью $l \times q$ как отдельное *дискретное состояние случайного процесса с непрерывным временем*, то данная система уравнений превратится в *систему уравнений Колмогорова*, описывающую динамику изменения вероятностей пребывания взора испытуемого в указанных состояниях. Каждому состоянию с номером n при этом ставится в соответствие уравнение

$$\frac{d\bar{p}^n(t)}{dt} = -\sum_j \eta_{nj}(t)\bar{p}^n(t) + \sum_i \eta_{in}(t)\bar{p}^i(t), \quad (4)$$

где $\bar{p}^n(t) = \bar{p}^n(t)G$ и $\bar{p}^i(t) = \bar{p}^i(t)G$ – вероятности пребывания в n -м и i -м состояниях; G – площадь ячейки прямоугольной сетки; $n, i = 1, \dots, M; M = lq$; η_{ni} – интенсивность переходов из состояния n в состояние i ; η_{in} – интенсивность переходов из состояния i в состояние n .

Дискретизации области, приведенной на рис. 1, при этом соответствует граф дискретных состояний, представленный на рис. 3. Интенсивности переходов между несмежными состояниями полагаются равными нулю.

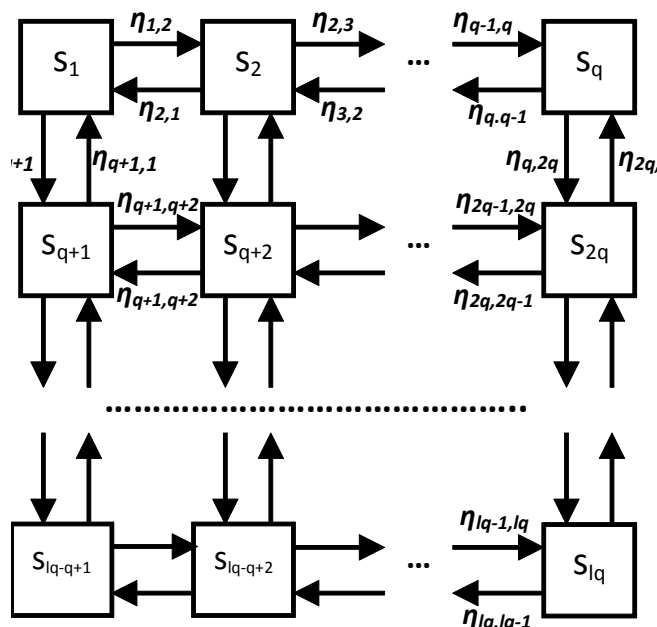


Рис. 3. Граф дискретных состояний, аппроксимирующий случайный процесс перемещения взгляда по поверхности стимула

Для интегрирования указанной выше системы уравнений необходимо задать начальные условия $\{\tilde{p}^n(0)\}_{n=1,\dots,M}$, где M – число состояний. В любой момент времени t выполняется нормализующее условие:

$$\sum_{n=1}^M \tilde{p}^n(t) = 1.$$

Следуя представленному выше способу решения задачи классификации, необходимо, используя данные наблюдений, идентифицировать распределения вероятностей пребывания взгляда по поверхности стимула для всех категорий испытуемых. Аппроксимация этих распределений с учетом проведенной дискретизации сводится к оценке интенсивностей переходов между состояниями рассматриваемого случайного процесса $\{\eta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,M}$, которые являются свободными параметрами системы уравнений Колмогорова. Эти оценки могут быть определены, опираясь на *критерий соответствия наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм*, описывающих распределения частот пребывания в состояниях процесса. В качестве такого критерия далее используется *статистика Пирсона*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(F_i - \tilde{p}^i(t)N)^2}{\tilde{p}^i(t)N}.$$

В приведенном выше выражении прогнозируемая частота попадания в i -е состояние равна $\tilde{p}^i(t)N$, где N – число элементов в выборке, а вероятностные функции $\tilde{p}^i(t)$ получаются путем численного интегрирования систем уравнений Колмогорова. Соответствующие наблюдаемые частоты F_i определяются по выборочным распределениям пребывания в состояниях процесса в заданные моменты времени.

Величина χ^2 является мерой соответствия в том смысле, что ее большие значения означают плохое согласование прогнозируемых и наблюдаемых результатов, а малые значения – хорошее согласование. Соответственно, решение задачи идентификации сводится к вычислению тех интенсивностей переходов η_{ij} , которые обеспечивают минимальное значение суммы статистик Пирсона в те моменты времени, для которых имеются результаты наблюдений.

Способ идентификации свободных параметров, построенный на применении указанной меры соответствия, называется *методом минимума χ^2* (Крамер, 1976). Как показано в этой работе, он дает решения, практически совпадающие с оценками, полученными *методом максимального правдоподобия*. Согласно теореме Г. Крамера (Крамер, 1976), при выполнении условий:

- 1) адекватности модели случайного процесса наблюдениям;
- 2) равенства единице суммы вероятностей пребывания в состояниях;
- 3) отделимости указанных вероятностей от нуля ($\tilde{p}^i > c^2 > 0$ при всех i);
- 4) существования непрерывных частных производных первого и второго порядка по идентифицируемым свободным параметрам от всех вероятностей пребывания в состояниях;
- 5) равенства числу свободных параметров ранга матрицы Якоби, составленной из частных производных первого порядка от вероятностей пребывания в состояниях по свободным параметрам, –

рассмотренная задача идентификации при заданном объеме наблюдений имеет единственное решение, которое при неограниченном увеличении объема наблюдений сходится по вероятности к искомому решению, а значения статистики χ^2 , определяемые найденными значениями свободных параметров, асимптотически описываются распределением χ^2 с $M-\gamma-1$ степенями свободы, где γ – число определяемых значений свободных параметров.

Знание распределения позволяет использовать приведенную выше статистику для проверки гипотезы о том, что полученные прогнозируемые частоты попадания в состояния согласуются с результатами наблюдений. Очевидно, что использование этой статистики корректно только при выполнении указанных условий теоремы.

Если условия теоремы не выполнены, то вычисление приближений к оценкам максимального правдоподобия с использованием критерия χ^2 остается возможным, однако полученное решение может быть не единственным, а значения соответствующей статистики не обязаны быть распределены как χ^2 . Следует отметить, что одним из признаков нарушения условий теоремы является невыполнение неравенства $M > \gamma - 1$.

Поскольку для решения рассматриваемой задачи важны не сами оценки свободных параметров, а вычисляемые с их помощью функции $\tilde{p}^i(t)$, то неединственность таких оценок не создает никаких проблем, если разные наборы значений этих параметров приводят к вычислению одних и тех же вероятностных функций. Что касается невыполнения второго следствия теоремы, то для оценки степени соответствия результатов решения наблюдениям следует подобрать критерий, отличный от указанного выше.

Такой критерий строится далее на основе анализа регрессионной зависимости между наблюдаемыми и прогнозируемыми частотами пребывания в состояниях исследуемого случайного процесса в контрольные моменты времени. Для этого предположим, что наблюдаемые частоты выражаются через соответствующие прогнозируемые вероятности по упрощенной формуле гауссовской простой линейной регрессии:

$$F_k^i = a^i \tilde{p}_k^i + \varepsilon_k^i,$$

где F_k^i – наблюдаемая частота пребывания в i -м состоянии в k -й контрольный момент времени ($k = 1, \dots, K$), \tilde{p}_k^i и ε_k^i – с $F_k^i = \alpha^i \tilde{p}_k^i + \varepsilon_k^i$, прогнозируемые вероятности и случайные ошибки, α^i – неизвестные параметры регрессии. Полагается, что случайные ошибки ε_k^i независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним значением и одинаковой для всех моментов времени k дисперсией. Оценки степени соответствия результатов решения наблюдениям обеспечиваются с помощью стандартных критериев, которые используются для проверки статистической значимости используемой регрессионной модели, а именно: критерия Стьюдента для проверки гипотез $\alpha^i = 0$ и F -критерия для проверки значимости уравнения регрессии. Кроме того, в ряде случаев можно дополнительно проверить, входит ли единица в 95-процентный доверительный интервал для величин α^i/N . Если рассмотренная регрессионная модель статистически значима при заданном уровне α , а единица входит в указанный доверительный интервал, то можно говорить о приемлемой степени соответствия результатов решения наблюдениям.

Процедура вычисления оценок свободных параметров состоит из двух этапов. На подготовительном этапе с помощью электронной таблицы для рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений кодируется численная схема интегрирования, позволяющая вычислять вероятностные функции $\{\tilde{p}^n(t)\}_{n=1, \dots, M}$ (Куравский, Баранов, 2002; Kuravsky, Baranov, 2003) с некоторым заданным временным шагом. Для вычисления решений с приемлемой точностью оказались достаточными методы Рунге-Кутты или их эквиваленты. Для решения задачи важно, что электронная таблица поддерживает динамические связи между содержимым ячеек. Если поместить свободные параметры и временной шаг в отдельные ячейки, на которые ссылаются как ячейки, содержащие формулы для вычисления производных в системе дифференциальных уравнений, так и ячейки, содержащие начальные вероятности нахождения в различных состояниях системы, то все решение будет автоматически модифицироваться по мере изменения значений свободных параметров.

На заключительном этапе запускается численная процедура многомерной нелинейной оптимизации (Куравский, Баранов, 2002; Kuravsky, Baranov, 2003). Значения параметров, полученные с ее помощью, рассматриваются как характеристики математической модели, выявленные в результате наблюдений. Следует отметить, что рассмотренная процедура обеспечивает решение *обратной задачи*, при котором вычисляются параметры системы дифференциальных уравнений, определяющей решение с заданными характеристиками.

Как правило, идентификация свободных параметров случайных процессов со структурой связей между состояниями, представленной на рис. 3, является сложной вычислительной задачей. Однако имеется эффективный прием, позволяющий упростить эту работу.

Для этого строки и столбцы состояний исходной сети могут быть объединены в сгруппированные состояния, а именно: нахождение в состоянии V_j ($j=1, 2, \dots, q$) равносильно нахождению в одном из состояний $S_j, S_{j+q}, \dots, S_{j+(l-1)q}$, а нахождение в состоянии H_i ($i=1, 2, \dots, l$) равносильно нахождению в одном из состояний $S_{(i-1)q+1}, S_{(i-1)q+2}, \dots, S_{iq}$ (рис. 4).

Получаемые при этом графы состояний представлены на рис. 5 и 6.

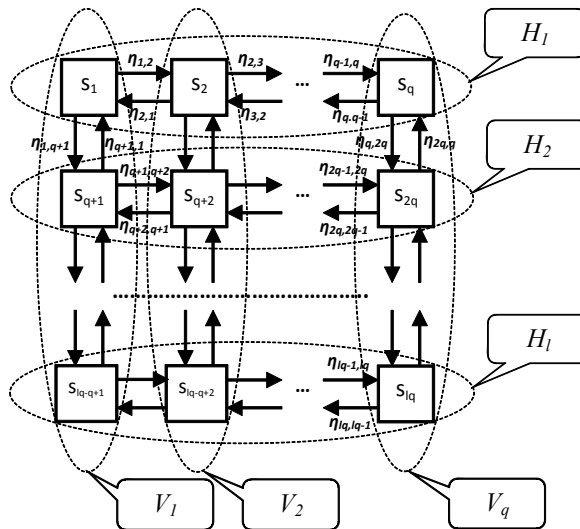


Рис. 4. Объединение состояний в группы

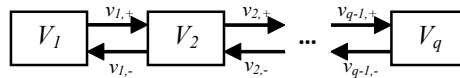


Рис. 5. Граф сгруппированных состояний (результат группировки столбцов)

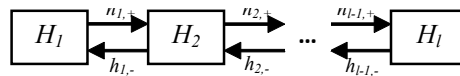


Рис. 6. Граф сгруппированных состояний (результат группировки строк)

Поскольку вероятность пребывания в каждом из сгруппированных состояний равна сумме вероятностей пребывания в составляющих его состояниях исходного случайного процесса, уравнения Колмогорова для вероятностей нахождения взора в сгруппированных состояниях получаются путем согласованного суммирования левых и правых частей всех уравнений (4), которые соответствуют ячейкам, формирующим данные состояния:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_V^1}{dt} = v_{1,-}p_V^2 - v_{1,+}p_V^1; \\ \dots \\ \frac{dp_V^i}{dt} = v_{i-1,+}p_V^{i-1} + v_{i,-}p_V^{i+1} - (v_{i,+} + v_{i-1,-})p_V^i \\ \quad (i = 2, 3, \dots, q-1); \\ \dots \\ \frac{dp_V^q}{dt} = v_{q-1,+}p_V^{q-1} - v_{q-1,-}p_V^q, \\ \dots \\ \frac{dp_H^1}{dt} = h_{1,-}p_H^2 - h_{1,+}p_H^1; \\ \dots \\ \frac{dp_H^i}{dt} = h_{i-1,+}p_H^{i-1} + h_{i,-}p_H^{i+1} - (h_{i,+} + h_{i-1,-})p_H^i \\ \quad (i = 2, 3, \dots, l-1); \\ \dots \\ \frac{dp_H^l}{dt} = h_{l-1,+}p_H^{l-1} - h_{l-1,-}p_H^l, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{где } p_V^j = \sum_{k=1}^l \tilde{p}^{(k-1)q+j} \quad (j = 1, \dots, q), p_H^j = \sum_{k=1}^q \tilde{p}^{(j-1)q+k} \quad (j = 1, \dots, l),$$

$$v_{j,+} = \sum_{k=1}^l \eta_{(k-1)q+j, (k-1)q+j+1} \quad (j = 1, \dots, q-1),$$

$$v_{j,-} = \sum_{k=1}^l \eta_{(k-1)q+j+1, (k-1)q+j} \quad (j = 1, \dots, q-1), \quad h_{j,+} = \sum_{k=1}^q \eta_{(j-1)q+k, jq+k} \quad (j = 1, \dots, l-1), \quad h_{j,-} =$$

$$= \sum_{k=1}^q \eta_{jq+k, (j-1)q+k} \quad (j = 1, \dots, l-1).$$

Таким образом, исследование исходного случайного процесса, структура связей состояний которого определяется прямоугольной сеткой размерностью $l \times q$ (рис. 3), сводится к анализу двух процессов со сгруппированными состояниями, имеющих меньшую размерность (l или q) и упрощенную структуру связей (рис. 5 и 6). Интенсивности переходов между сгруппированными состояниями могут быть идентифицированы, как указано выше. Возврат к исходному процессу прост: поскольку вероятности пребывания в вертикально и горизонтально расположенных группах состояний независимы, то вероятность нахождения в состоянии, одновременно принадлежащем группам H_i и V_j , вычисляется как произведение вероятностей p_H^i и p_V^j пребывания в этих группах. Представленный простой способ декомпозиции существенно упрощает анализ рассматриваемых систем.

Получив, как показано выше, аппроксимации распределений вероятностей пребывания взора по поверхности стимулов для различных категорий испытуемых $\omega \in \Omega$, можно определять вероятностные оценки принадлежности к заданным категориям ранее не идентифицированных лиц. Чтобы решить эту задачу, для каждого такого лица следует зарегистрировать траекторию движения взора по поверхности рабочего стимула $\mathbf{U}(t)$, $t \in T$, и, используя заранее известные аппроксимации $\tilde{p}_\omega(u, t | u_0, t_0)$ указанных распределений, определить вероятностные оценки P_ω прохождения наблюдаемых траекторий. В общем случае для каждой категории ω при этом вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода:

$$P_\omega = \int_{\mathbf{U}(t)} \ln \tilde{p}_\omega(u, t | u_0, t_0) du,$$

где du – бесконечно малый элемент длины траектории $\mathbf{U}(t)$. Испытуемый относится к категории ω_{\max} с наибольшей вероятностной оценкой:

$$P_{\omega_{\max}} = \max_{\omega \in \Omega} P_\omega.$$

На практике приведенные выше интегралы для вычисления P_ω заменяются своими численными оценками.

3. Пример практического применения

3.1. Экспериментальная процедура и оборудование

Экспериментальная процедура предусматривала видеорегистрацию движений глаз испытуемого в процессе изучения стимульного материала, представляющего собой математические тексты различного уровня сложности. Первое задание соответствовало программе средней общеобразовательной школы, а второе – программе подготовки студентов-первокурсников технических специальностей.

Испытуемому предлагалось в течение неограниченного времени прочитать и изучить каждый из двух представленных текстов с целью выявления ошибок в рассуждениях или установления их отсутствия. Момент принятия решения фиксировался словами «я готов»,

после чего экспериментатор приостанавливал запись движений глаз и давал испытуемому возможность изложить полученные выводы, развернуто пояснив их мотивы. Ответ испытуемого фиксировался с помощью средств аудиозаписи.

Запись движений глаз проводилась в Центре экспериментальной психологии МГППУ с помощью стационарной системы регистрации движений глаз SMI High Speed (Демидов, Жегалло, 2008; Жегалло, 2009) (рис. 7) в монокулярном режиме с частотой 500 Гц. Стимульный монитор работал с разрешением 1280x1024 точек. Калибровка проводилась стандартным способом с использованием девяти опорных фиксационных точек.



Рис. 7. Регистрация движений глаз испытуемого с помощью системы SMI High Speed

В эксперименте приняли участие 24 студента и школьника, имеющих нормальное или скорректированное до нормального зрение.

Стимульный материал первого задания представлен на рис. 8. Заданный текст содержит контрольную ошибку: в предпоследнем предложении нельзя производить разложение множителя $x^2 + 1$ на составляющие с вещественными коэффициентами.

Правильно ли выполнено разложение на множители полинома
 $x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 9x$?

Рассмотрим полином $x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 9x$.

Вынесем за скобки множитель x , получив $x(x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9)$.

Представим этот полином в виде $x(x^4 + 6x^3 + 9x^2 + x^2 + 6x + 9)$.

Вынесем за скобки общий множитель x^2 для первых трех слагаемых внутри скобок, получив $x(x^2(x^2 + 6x + 9) + x^2 + 6x + 9)$.

Внутри внешних скобок дважды фигурирует выражение $x^2 + 6x + 9$.

Вынесем его за скобки: $x((x^2 + 6x + 9)(x^2 + 1))$.

Поскольку $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, а выражение $x^2 + 1$ есть $(x + 1)(x - 1)$, то полином можно преобразовать к следующему виду:
 $x(x + 3)^2(x + 1)(x - 1)$.

Задача решена.

Рис. 8. Стимульный материал первого задания, в котором описано решение задачи на разложение полинома на множители

Стимульный материал второго задания был посвящен решению алгебраической проблемы собственных значений (рис. 9) и содержал две контрольные ошибки: во-первых, вектор x некорректно вынесен за скобки, и, во-вторых, собственные значения матрицы некорректно определяются из неравенства $\det (Ax-\lambda E)\neq 0$.

Корректны ли следующие рассуждения?

Число λ называется *собственным значением* матрицы A , если существует такой ненулевой вектор x , что

$$Ax=\lambda x.$$

Любой ненулевой вектор x , удовлетворяющий данному уравнению, называется *собственным вектором* матрицы A , соответствующим собственному значению λ .

Представим указанное уравнение в виде $Ax=\lambda Ex$, где E – единичная матрица. Запишем его в следующей форме:

$$(Ax-\lambda E)x=0.$$

Если матрица $Ax-\lambda E$ не является вырожденной, то полученная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Поэтому собственные значения определяются из следующего характеристического соотношения:

$$\det(Ax-\lambda E)\neq 0.$$

Рис. 9. Стимульный материал второго задания, в котором описано решение алгебраической проблемы собственных значений

3.2. Аппроксимация решения и результаты диагностики

Область, на которой располагается стимульный материал, была разбита прямоугольной сеткой размерностью 4×4 на 16 ячеек, что обеспечило высоту строк и ширину столбцов равными, соответственно, 256 и 320 точкам (рис. 10).

		v1	v2	v3	v4
	(0, 0)	(320, 0)	(640, 0)	(960, 0)	
n1	Зона 1.1	Зона 2.1	Зона 3.1	Зона 4.1	
	(0, 256)	(320, 256)	(640, 256)	(960, 256)	(1280, 256)
n2	Зона 1.2	Зона 2.2	Зона 3.2	Зона 4.2	
	(0, 512)	(320, 512)	(640, 512)	(960, 512)	(1280, 512)
n3	Зона 1.3	Зона 2.3	Зона 3.3	Зона 4.3	
	(0, 768)	(320, 768)	(640, 768)	(960, 768)	(1280, 768)
n4	Зона 1.4	Зона 2.4	Зона 3.4	Зона 4.4	
	(320, 1024)	(640, 1024)	(960, 1024)	(1280, 1024)	

Рис. 10. Дискретизация области стимула: в левых верхних и правых нижних углах указаны их координаты; строки и столбцы обозначены соответственно как $N1-N4$ и $V1-V4$

Уравнения (5) для графов сгруппированных состояний, представленных на рис. 5 и 6, при $q=l=4$ принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_V^1}{dt} = v_{1,-}p_V^2 - v_{1,+}p_V^1; \\ \frac{dp_V^2}{dt} = v_{1,+}p_V^1 + v_{2,-}p_V^3 - (v_{2,+} + v_{1,-})p_V^2; \\ \frac{dp_V^3}{dt} = v_{2,+}p_V^2 + v_{3,-}p_V^4 - (v_{3,+} + v_{2,-})p_V^3; \\ \frac{dp_V^4}{dt} = v_{3,+}p_V^3 - v_{3,-}p_V^4, \\ \\ \frac{dp_H^1}{dt} = h_{1,-}p_H^2 - h_{1,+}p_H^1; \\ \frac{dp_H^2}{dt} = h_{1,+}p_H^1 + h_{2,-}p_H^3 - (h_{2,+} + h_{1,-})p_H^2; \\ \frac{dp_H^3}{dt} = h_{2,+}p_H^2 + h_{3,-}p_H^4 - (h_{3,+} + h_{2,-})p_H^3; \\ \frac{dp_H^4}{dt} = h_{3,+}p_H^3 - h_{3,-}p_H^4. \end{array} \right.$$

Для обеспечения лучшего соответствия результатов моделирования наблюдениям интенсивности переходов между состояниями исследуемого случайного процесса идентифицировались по отдельности для следующих друг за другом временных интервалов длительностью 10 сек. Для решения задачи оптимизации использовалось программное обеспечение компании Frontline Systems, реализующее метод обобщенного градиентного спуска.

Численное интегрирование систем уравнений Колмогорова с идентифицированными значениями указанных параметров позволило вычислить прогнозируемые вероятности пребывания в сгруппированных состояниях. Зависимости этих вероятностей от времени для второго задания совместно с соответствующими оценками, полученными в результате наблюдений, в качестве иллюстрации приведены на рис. 11–14. Как видно из графиков, идентификация свободных параметров моделей приводит к определенному сглаживанию наблюдаемых данных, устраняющему их случайную «шумовую» составляющую.

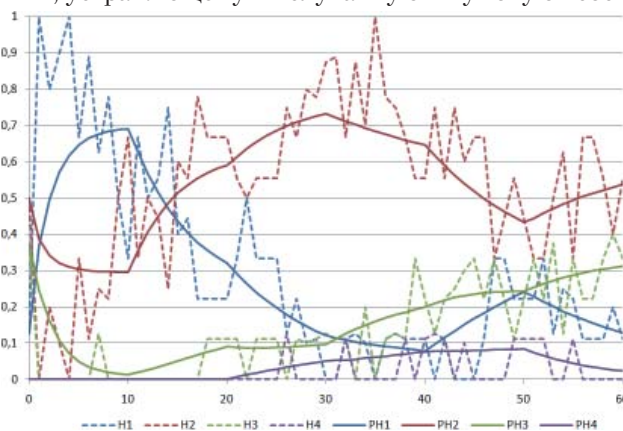


Рис. 11. Зависимости от времени (в сек) прогнозируемых вероятностей пребывания в состояниях, сгруппированных по строкам, и соответствующих им оценок, полученных в результате наблюдений, для испытуемых, выполнивших второе задание: H1–H4 – наблюдаемые оценки (показаны пунктиром), PH1–PH4 – прогнозируемые оценки

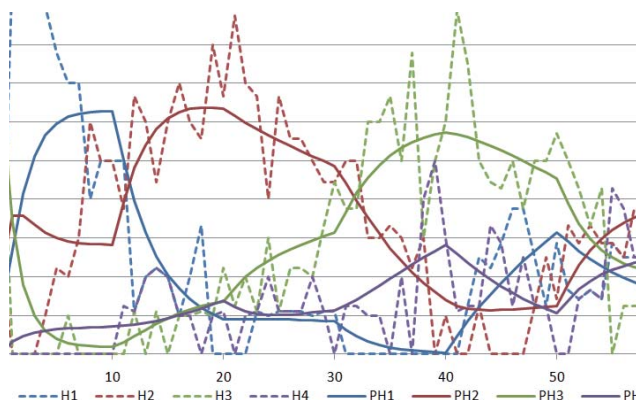


Рис. 12. Зависимости от времени (в сек) прогнозируемых вероятностей пребывания в состояниях, сгруппированных по строкам, и соответствующих им оценок, полученных в результате наблюдений, для испытуемых, не выполнивших второе задание: H1–H4 – наблюдаемые оценки (показаны пунктиром), PH1–PH4 – прогнозируемые оценки

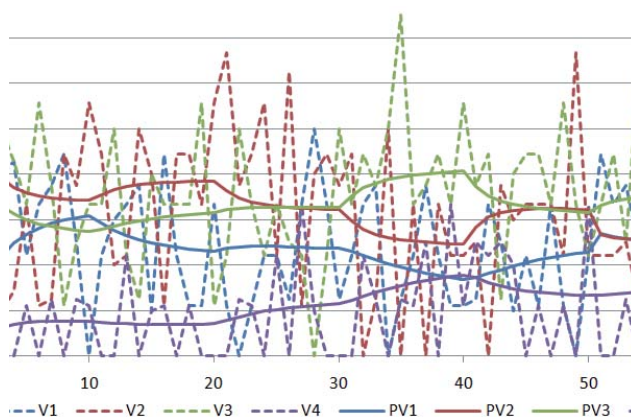


Рис. 13. Зависимости от времени (в сек) прогнозируемых вероятностей пребывания в состояниях, сгруппированных по столбцам, и соответствующих им оценок, полученных в результате наблюдений, для испытуемых, выполнивших второе задание: V1–V4 – наблюдаемые оценки (показаны пунктиром), PV1–PV4 – прогнозируемые оценки

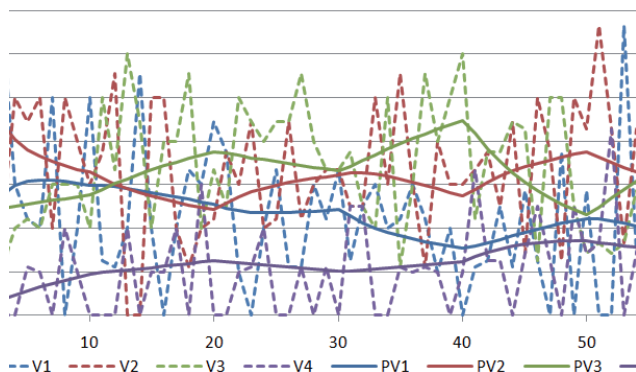


Рис. 14. Зависимости от времени (в сек) прогнозируемых вероятностей пребывания в состояниях, сгруппированных по столбцам, и соответствующих им оценок, полученных в результате наблюдений, для испытуемых, не выполнивших второе задание: V1–V4 – наблюдаемые оценки (показаны пунктиром), PV1–PV4 – прогнозируемые оценки

Оценки степени соответствия результатов решения наблюдениям, построенные на основе критерия Стьюдента и F -критерия, свидетельствуют о наличии высокозначимой регрессионной зависимости между наблюдаемыми и прогнозируемыми частотами пребывания в рассмотренных выше сгруппированных состояниях ($p < 0,0001$), что позволяет говорить о приемлемой степени соответствия результатов решения наблюдениям. Этот вывод также подкрепляется дополнительным аргументом: единица входит в 95-процентный доверительный интервал для коэффициентов регрессии, связывающих исследуемые величины.

В качестве иллюстрации на рис. 15–20 представлены распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованных областей рассмотренных стимулов в контрольные моменты времени (как указано выше, эти вероятности вычисляются как произведения соответствующих вероятностей пребывания в сгруппированных состояниях). Динамика изменения этих распределений представляет искомые аппроксимации $\hat{p}_\omega(u, t | u_0, t_0)$ и отражает пространственно-временные особенности визуального восприятия стимулов у различных категорий испытуемых.

Рассмотренные выше вероятностные оценки P_ω , характеризующие прохождение наблюдаемых траекторий, обеспечили правильный выбор категории испытуемых в 96% проведенных экспериментов для первого задания и в 83% экспериментов для второго задания, что свидетельствует об эффективности предложенного подхода к построению процедур тестирования.

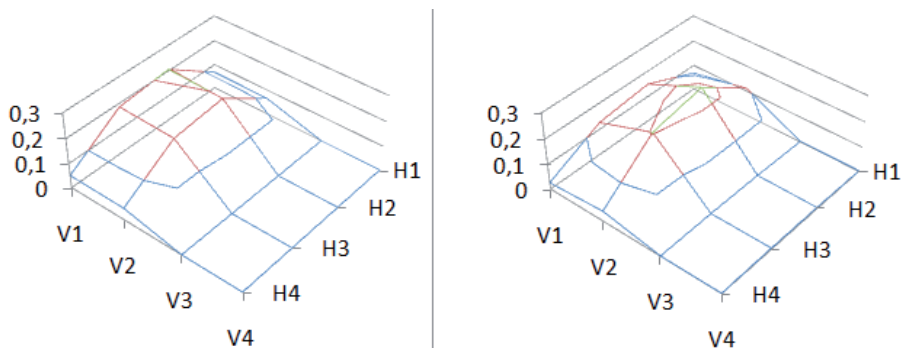


Рис. 15. Распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области стимула для выполнивших (слева) и не выполнивших (справа) первое задание через 15 сек после начала записи

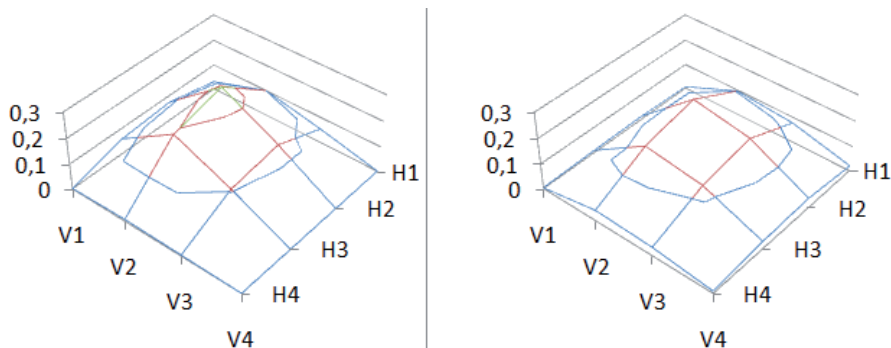


Рис. 16. Распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области стимула для выполнивших (слева) и не выполнивших (справа) первое задание через 45 сек после начала записи

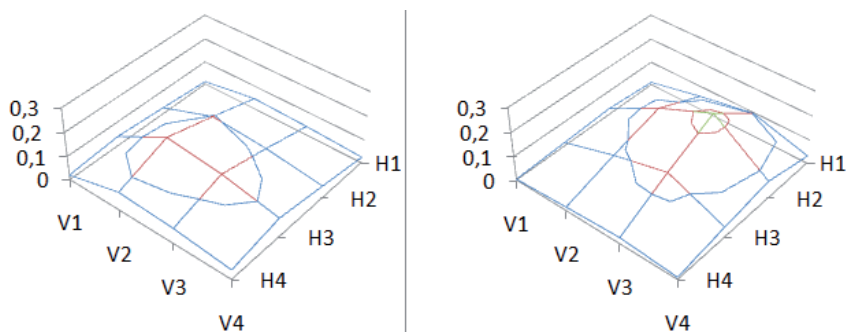


Рис. 17. Распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области стимула для выполнивших (слева) и не выполнивших (справа) первое задание через 60 сек после начала записи

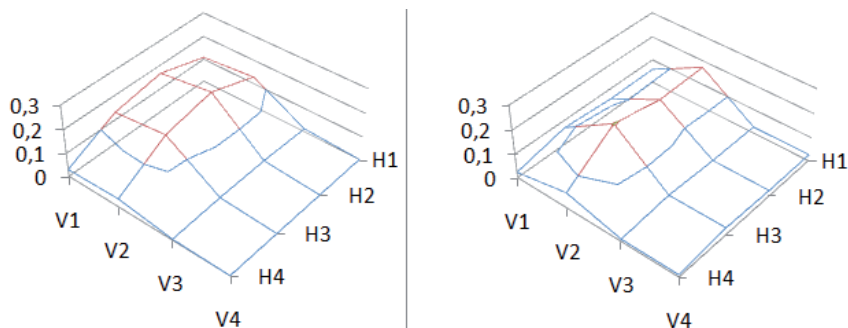


Рис. 18. Распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области стимула для выполнивших (слева) и не выполнивших (справа) второе задание через 15 сек после начала записи

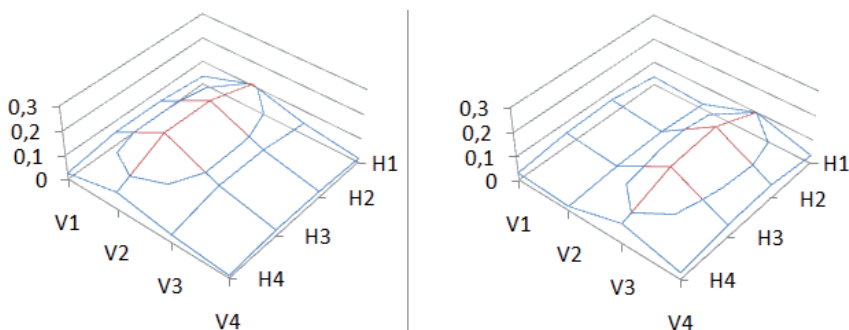


Рис. 19. Распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области стимула для выполнивших (слева) и не выполнивших (справа) второе задание через 45 сек после начала записи

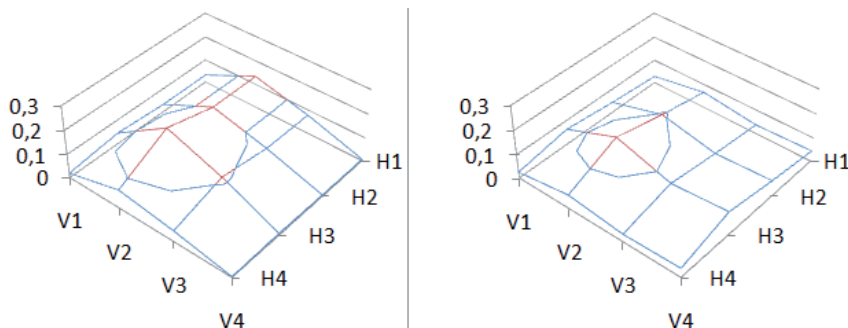


Рис. 20. Распределения вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области стимула для выполнивших (слева) и не выполнивших (справа) второе задание через 60 сек после начала записи

4. Основные результаты и выводы

1. Перспективы разработки современных технологий тестирования связаны с включением в измерительный процесс методов современной экспериментальной психологии и, в частности, средств анализа глазодвигательной активности.

2. Развитие и распространение имеющихся достижений в этой области сдерживаются рядом ограничений, наиболее существенными из которых являются слабые возможности для исследования временной динамики движения глаз и неразвитый математический аппарат.

3. Разработан новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов, основанный на представлении движения взора испытуемого по поверхности стимулов с помощью марковского случайного процесса, распределение переходных вероятностей которого удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова, и диагностической процедуре, которая обеспечивается идентификацией распределения вероятностей пребывания взора по поверхности стимула по результатам наблюдений для всех рассматриваемых категорий испытуемых и оценкой вероятности наблюдаемой траектории движения взора при условии принадлежности к каждой из заданных категорий испытуемых.

4. Разработан метод приближенного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, сводящий исходную задачу к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова относительно плотностей вероятности пребывания взора на поверхности стимула, усредненных по площади ячеек его дискретизированной области.

5. Разработан метод идентификации интенсивностей переходов между ячейками дискретизированной области, входящих в качестве свободных параметров в систему дифференциальных уравнений Колмогорова. Этот метод обеспечивает построение приближений к оценкам максимального правдоподобия и опирается на численную процедуру многомерной нелинейной оптимизации, что обеспечивает решение обратной задачи для указанной системы уравнений.

6. Предложен статистический критерий для оценки степени соответствия наблюдаемых и прогнозируемых частот пребывания в ячейках дискретизированной области стимула в контрольные моменты времени, построенный на основе анализа регрессионной зависимости этих частот.

7. Приведенный в данной работе пример практического применения полученных результатов для выявления уровня математической подготовки студентов и школьников свидетельствует об эффективности предложенного подхода к построению процедур тестирования.

Литература

Барбанищikov В.А. Окуломоторные структуры восприятия. М.: ИП РАН, 1997.

Барбанищikov В.А. Восприятие выражений лица. М.: ИП РАН, 2009.

Барбанищikov В.А. Экспрессии лица и их восприятие. М.: ИП РАН, 2012.

Барбанищikov В.А. Восприятие индивидуально-психологических особенностей человека по изображению целого и частично открытого лица // Экспериментальная психология. 2008. Т. 1. № 1. С. 62–83.

Барбанищikov В.А., Ананьева К.И., Харитонов В.Н. Организация движений глаз при восприятии изображений лица // Экспериментальная психология. 2009. Т. 2. № 2. С. 31–60.

- Барабанищikov В. А., Демидов А. А. Экспериментальная психология в России: современное состояние и перспективы развития // Экспериментальная психология. 2011. Т. 4. № 1. С. 134–140.
- Барабанищikov В. А., Майтлина И. Н. Оценка «глубинных» индивидуально-психологических особенностей человека по фотоизображению его лица // Экспериментальная психология. 2010. Т. 3. № 4. С. 50–71.
- Безруких М. М., Демидов А. А., Иванов В. В. Возрастные особенности окулomotorной активности детей в процессе чтения // Психология человека в современном мире. Т. 2: Матер. Всеросс. юбил. науч. конф., посвящ. 120-летию со дня рождения С. Л. Рубинштейна. М.: ИП РАН. 2009. С. 151–155.
- Демидов А. А., Жегалло А. В. Оборудование SMI для регистрации движений глаз: тест-драйв // Экспериментальная психология. 2008. Т. 1. № 1. С. 149–159.
- Жегалло А. В. Система регистрации движений глаз SMI High Speed: особенности использования // Экспериментальная психология. 2009. Т. 2. № 4. С. 111–117.
- Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976.
- Куравский Л. С., Баранов С. Н. Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2001. № 12. С. 47–63.
- Куравский Л. С., Баранов С. Н. Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2002. № 11. С. 29–40.
- Куравский Л. С., Баранов С. Н., Малых С. Б. Нейронные сети в задачах прогнозирования, диагностики и анализа данных: Учеб. пособие. М.: РУСАВИА, 2003.
- Куравский Л. С., Баранов С. Н., Корниенко П. А. Обучаемые многофакторные сети Маркова и их применение для исследования психологических характеристик // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2005. № 12. С. 65–76.
- Куравский Л. С., Баранов С. Н., Юрьев Г. А. Синтез и идентификация скрытых марковских моделей для диагностики усталостного разрушения // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2010. № 12. С. 20–36.
- Куравский Л. С., Марголис А. А., Юрьев Г. А., Мармалюк П. А. Концепция системы поддержки принятия решений для психологического тестирования // Психологическая наука и образование. 2012. № 1. С. 56–65.
- Куравский Л. С., Юрьев Г. А. Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2011а. № 2. С. 21–29.
- Куравский Л. С., Юрьев Г. А. Использование марковских моделей при обработке результатов тестирования // Вопросы психологии. 2011б. № 2. С. 98–107.
- Куравский Л. С., Юрьев Г. А. Об одном подходе к адаптивному тестированию и устранению его артефактов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2012а. № 1. С. 54–66.
- Куравский Л. С., Юрьев Г. А. Вероятностный метод фильтрации артефактов при адаптивном тестировании // Экспериментальная психология. 2012б. Т. 5. № 1. С. 119–131.
- Мармалюк П. А., Звонкина О. М. Опорные показатели глазодвигательной активности при прохождении теста Равена и автоматизация их расчета // Молодые ученые – нашей новой школе. Матер. XI Межвуз. науч.-практ. конф. с межд. участием. М.: МГППУ, 2012. С. 350–352.
- Панфилова А. С. Система тестирования интеллекта на базе факторных моделей и самоорганизующихся карт Кохонена // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2012. № 9 (в печати).
- Тихонов В. И., Шахтарин Б. И., Сизых В. В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 5. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. М.: Горячая линия-Телеком, 2009.
- Томенева Ю. А. Психологическое измерение. М.: Аспект-Пресс, 2007.
- Хохлова А. А. Исследование глазодвигательной активности при прохождении матричного теста интеллекта Равена // Молодые ученые – нашей новой школе: Матер. X Науч.-практ. межвуз. конф. М.: МГППУ. 2011. С. 343–345.

- Шахтарун Б.И.* Случайные процессы в радиотехнике. Т. 1. Линейные преобразования. М.: Горячая линия-Телеком, 2010.
- Baker F.B.* The Basics of Item Response Theory. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation. University of Maryland, College Park, MD, 2001.
- Brandt S.A., Stark L.W.* Spontaneous eye movements during visual imagery reflect the content of the visual scene // *Journal of Cognitive Neuroscience*. 1997. № 9. P. 27–38.
- Cagli R.C., Coraggio P., Napoletano P., Boccignone G.* What the draughtsman's hand tells the draughtsman's eye: A sensorimotor account of drawing // *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*. 2008. № 22. P. 1015–1029.
- Dayan P.* Improving generalization for temporal difference learning: The successor representation // *Neural Computation*. 1993. № 5. P. 613–624.
- Ellis S.R., Stark L.* Statistical dependency in visual scanning // *Human Factors*. 1986. № 28. P. 421–438.
- Gregory R.J.* Psychological testing: History, principles, and applications (5th edition). N.Y.: Pearson, 2007.
- Gulliksen H.* Theory of Mental Tests. John Wiley & Sons Inc., 1950.
- Hayes T.R., Petrov A.A., Sederberg P.B.* A novel method for analyzing sequential eye movements reveals strategic influence on Raven's Advanced Progressive Matrices // *Journal of Vision*. 2011. № 10. P. 1–11.
- Jansen A.R., Marriott K., Yelland G.W.* Parsing of algebraic expressions by experienced users of mathematics // *European Journal of Cognitive Psychology*. 2007. № 19. P. 286–320.
- Kuravsky L.S., Baranov S.N.* Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life // *Proc. Condition Monitoring 2003*, Oxford, United Kingdom, July 2003. P. 256–279.
- Kuravsky L.S., Malykh S.B.* On the application of queuing theory for analysis of twin data // *Twin Research*. 2000. № 3. P. 92–98.
- Kuravsky L.S., Baranov S.N.* Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis // *Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration*, St.-Petersburg, Russia, July 2004. P. 2929–2944.
- Kuravsky L.S., Baranov S.N.* The concept of multifactor Markov networks and its application to forecasting and diagnostics of technical systems // *Proc. Condition Monitoring 2005*, Cambridge, United Kingdom, July 2005. P. 111–117.
- Kuravsky L.S., Baranov S.N., Yuryev G.A.* Synthesis and identification of hidden Markov models based on a novel statistical technique in condition monitoring // *Proc. 7th International Conference on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies*, Stratford-upon-Avon, England, June 2010.
- Myers C.W., Schoelles M.J.* ProtoMatch: A tool for analyzing high-density, sequential eye gaze and cursor protocols // *Behavior Research Methods*. 2005. № 37. P. 256–270.
- Patalano A.L., Juhasz B.J., Dicke O.* The Relationship Between Indecisiveness and Eye Movement Patterns in a Decision Making Informational Search Task // *Journal of Behavioral Decision Making*. 2010. № 23. P. 353–368.
- Ponsoda V., Scott D., Findlay J.M.* A probability vector and transition matrix analysis of eye movements during visual search // *Acta Psychologica*. 1995. № 88. P. 167–185.
- Rabiner L.R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // *Proceedings of the IEEE*. 1989. № 77. P. 257–286.
- Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests / Expanded edition with foreword and afterword by B. D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press. 1980.
- Rayner K.* Eye movements in reading and information processing: 20 years of research // *Psychological Bulletin*. 1998. № 124. P. 372–422.
- Salucci D.D., Anderson J.R.* Automated eye-movement protocol analysis // *Human-Computer Interaction*. 2001. № 16. P. 39–86.

Simola J., Salojarvi, Kojo I. Using hidden Markov model to uncover processing states from eye movements in information search tasks // *Cognitive Systems Research*. 2008. № 9. P. 237–251.

Van der Lans R., Pieters R., Wedel M. Eyemovement analysis of search effectiveness // *Journal of the American Statistical Association*. 2008. № 103. P. 452–461.

Vigneau F., Caissie A., Bors D. Eye-movement analysis demonstrates strategic influences on intelligence // *Intelligence*. 2006. № 34. P. 261–272.

Wright B.D., Masters G.N. Rating scale analysis. Rasch measurements. Chicago: MESA Press, 1982.

Wright B.D., Stone M.N. Best Test Design. Chicago: MESA Press, 1979.

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF A NEW APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF TESTING PROCEDURES

KURAVSKY L.S., Moscow City University of Psychology and Education, Moscow

MARMALYUK P.A., Moscow City University of Psychology and Education, Moscow

ALKHIMOV V.I., Moscow City University of Psychology and Education, Moscow

YUREV G.A., Moscow City University of Psychology and Education, Moscow

In this paper the authors propose to consider a new approach to the construction of intelligent and competency tests, based on a new technology of eye tracking of the subject on the surface of the test stimulus with the application of one of the most common varieties of random processes and methods of the subsequent analysis of the obtained data. Special attention is given to the mathematical substantiation of the proposed methods. An example of practical application of the obtained results for determining of the level of mathematical education of pupils and students is an illustration of the adaptation of the methods to the decision of applied problems of an estimation of the level of intelligence and competence.

Keywords: testing, Markov process, the Fokker-Planck-Kolmogorov equation, Kolmogorov equations.

Transliteration of the Russian references

Barabanshnikov V.A. Okulomotornye struktury vospriyatija. M.: IP RAN, 1997.

Barabanshnikov V.A. Vosprijatie vyrazhenij lica. M.: IP RAN, 2009.

Barabanshnikov V.A. Jekspressii lica i ih vosprijatie. M.: IP RAN, 2012.

Barabanshnikov V.A. Vosprijatie individual'no-psihologicheskikh osobennostej cheloveka po izobrazheniju celogo i chastichno otkrytogo lica // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2008. T. 1. № 1. S. 62–83.

Barabanshnikov V.A., Anan'eva K.I., Haritonov V.N. Organizacija dvizhenij glaz pri vospriyatii izobrazhenij lica // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2009. T. 2. № 2. S. 31–60.

Barabanshnikov V.A., Demidov A.A. Jeksperimental'naja psihologija v Rossii: sovremennoe sostojanie i perspektivy razvitija // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2011. T. 4. № 1. S. 134–140.

Barabanshnikov V.A., Majnina I.N. Ocenka «glubinnyh» individual'no-psihologicheskikh osobennostej cheloveka po fotoizobrazheniju ego lica // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2010. T. 3. № 4. S. 50–71.

Bezrukih M.M., Demidov A.A., Ivanov V.V. Vozrastnye osobennosti okulomotornoj aktivnosti detej v processe chtenija // *Psihologija cheloveka v sovremennom mire*. T. 2: Mater. Vseross. jubil. nauch. konf., posvjashh. 120-letiju so dnja rozhdenija S. L. Rubinshtejna. M.: IP RAN. 2009. S. 151–155.

Demidov A.A., Zhegallo A.V. Oborudovanie SMI dlja registracii dvizhenij glaz: test-drajv // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2008. T. 1. № 1. S. 149–159.

Zhegallo A.V. Sistema registracii dvizhenij glaz SMI High Speed: osobennosti ispol'zovanija // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2009. T. 2. № 4. S. 111–117.

Kramer G. Matematicheskie metody statistiki. M.: Mir, 1976.

- Kuravskij L.S., Baranov S.N.* Primenenie nejronnyh setej dlja diagnostiki i prognozirovanija ustalostnogo razrushenija tonkostennyh konstrukcij // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2001. № 12. S. 47–63.
- Kuravskij L.S., Baranov S.N.* Sintez setej Markova dlja prognozirovanija ustalostnogo razrushenija // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2002. № 11. S. 29–40.
- Kuravskij L.S., Baranov S.N., Malyh S.B.* Nejronnye seti v zadachah prognozirovanija, diagnostiki i analiza dannyh: Ucheb. posobie. M.: RUSAVIA, 2003.
- Kuravskij L.S., Baranov S.N., Kornienko P.A.* Obuchaemye mnogofaktornye seti Markova i ih primenenie dlja issledovanija psihologicheskikh harakteristik // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2005. № 12. S. 65–76.
- Kuravskij L.S., Baranov S.N., Jur'ev G.A.* Sintez i identifikacija skrytyh markovskih modelej dlja diagnostiki ustalostnogo razrushenija // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2010. № 12. s. 20–36.
- Kuravskij L.S., Margolis A.A., Jur'ev G.A., Marmaljuk P.A.* koncepcija sistemy podderzhki prinjatija reshenij dlja psihologicheskogo testirovanija // *Psihologicheskaja nauka i obrazovanie*. 2012. № 1. S. 56–65.
- Kuravskij L.S., Jur'ev G.A.* Adaptivnoe testirovanie kak markovskij process: modeli i ih identifikacija // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2011 a. № 2. S. 21–29.
- Kuravskij L.S., Jur'ev G.A.* Ispol'zovanie markovskih modelej pri obrabotke rezul'tatov testirovanija // *Voprosy psihologii*. 2011 b. № 2. S. 98–107.
- Kuravskij L.S., Jur'ev G.A.* Ob odnom podhode k adaptivnomu testirovaniju i ustraneniu ego artefaktov // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2012 a. № 1. S. 54–66.
- Kuravskij L.S., Jur'ev G.A.* Veroyatnostnyj metod fil'tracii artefaktov pri adaptivnom testirovanii // *Jeksperimental'naja psihologija*. 2012 b. T. 5. № 1. S. 119–131.
- Marmaljuk P.A., Zvonkina O.M.* Opornye pokazateli glazodvigatel'noj aktivnosti pri prohozhdenii testa Ravena i avtomatizacija ih rascheta // *Molodye uchenye – nashej novej shkole. Mater. XI Mezhvuz. nauch.-prakt. konf. s mezhd. uchastiem*. M.: MGPPU, 2012. S. 350–352.
- Panfilova A.S.* Sistema testirovanija intellekta na baze faktornyh modelej i samoorganizujushhhsja kart Kohonena // *Nejrokomp'jutery: razrabotka i primenenie*. 2012. № 9 (v pečati).
- Tihonov V.I., Shahtarin B.I., Sizyh V.V.* Sluchajnye processy. Primery i zadachi. T. 5. Ocenka signalov, ih parametrov i spektrov. Osnovy teorii informacii. M.: Gorjachaja linija-Telekom, 2009.
- Tjumeneva Ju.A.* Psihologicheskoe izmerenie. M.: Aspekt-Press, 2007.
- Hohlova A.A.* Issledovanie glazodvigatel'noj aktivnosti pri prohozhdenii matrichnogo testa intellekta Ravena // *Molodye uchenye – nashej novej shkole: Mater. X Nauch.-prakt. mezhvuz. konf.* M.: MGPPU. 2011. S. 343–345.
- Shahtarin B.I.* Sluchajnye processy v radiotehnike. T. 1. Linejnye preobrazovanija. M.: Gorjachaja linija-Telekom, 2010.